Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve Étude épistémologique et enjeux didactiques

Cécile Ouvrier-Buffet

Habilitation à diriger des recherches

Université Paris Diderot

Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve

Étude épistémologique et enjeux didactiques

Cécile Ouvrier-Buffet

ESPE de Créteil (UPEC) ; Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR, Paris 7)

Note de synthèse

HDR soutenue le 12 décembre 2013, devant le jury composé de

Isabelle BLOCH, Professeur émérite, Université Bordeaux IV
Viviane DURAND-GUERRIER (rapporteur), Professeur, Université Montpellier 2
Sylvain GRAVIER, Directeur de recherche CNRS, Université Grenoble 1
Alain KUZNIAK (parrain), Professeur, Université Paris Diderot
Philippe R. RICHARD (rapporteur), Professeur, Université de Montréal

SOMMAIRE

Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve

Étude épistémologique et enjeux didactiques

- *Sigle utilisé* : P&R : *Preuves et Réfutations*
- *Remarques préliminaires* : dans tout le texte, nous utiliserons le mot « étudiant » comme terme générique pour désigner un élève (de primaire ou secondaire) ou un étudiant (de l'université), et le mot « gestionnaire » pour désigner la personne qui est en charge d'une situation, qu'il s'agisse d'un chercheur ou d'un enseignant. Nous conserverons également les acceptions anglaises (en italiques) afin de ne pas déformer les intentions des auteurs par une traduction approximative des termes qu'ils introduisent et utilisent.

Introduction

Un constat. Une distance existe sur la question des définitions lorsque celles-ci représentent l'un des produits d'un processus de construction de concepts ou lorsqu'elles se situent au commencement d'un exposé de nature axiomatique. D'un côté se trouvent des définitions « en construction », marquant différents stades de la génération de concepts, de l'autre des définitions formelles finalisées inscrites au sein d'une présentation théorique. Si la place de la construction de définitions n'est pas toujours clairement située dans la génération de nouvelles connaissances (formalisation et construction axiomatique mises à part), son lien avec la preuve est souvent réducteur. En effet, la présentation lexicale et logicienne[1] des définitions est fréquente et ne permet pas de construire des définitions. Cette vision se situe classiquement au sein d'une théorie mathématique déjà existante, formalisée, consistante, s'appuyant sur la structure dérivative d'une démonstration, et utilisant des définitions dites précises et techniques. La distance entre ces définitions formelles qui résultent de choix théoriques et la problématique qui leur a donné naissance est réelle. Ainsi, si l'on n'a pas accès à la génération des définitions, la compréhension des concepts que ces définitions sont censées permettre pourrait paraître en partie compromise, de même que les liens qui peuvent exister entre définitions et preuve.

Cadre général de la recherche. Ce travail s'inscrit dans un cadre plus large d'une étude de l'activité de recherche en mathématiques, et plus particulièrement des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC) (Grenier & Payan, 1998 et 2003). Ce type de situations se concentre sur la mise en œuvre d'une démarche de recherche proche de celle du chercheur, en classe, à différents niveaux (du primaire au supérieur, formation des enseignants) et auprès de publics variés (étudiants, enseignants, grand public, enfants psychotiques, réinsertion). Les études conduites au sein de la Fédération de Recherche *Maths à Modeler* portent sur la caractérisation de telles situations et sur l'analyse de processus (implication, définition,

[1] Une telle présentation s'attache en effet à proposer une dénomination appropriée – aspect lexical – et/ou une représentation particulière qui sera un outil dans une démonstration ultérieure pour régler une inférence – aspect logicien.

preuve, modélisation) et concepts (graphes, algorithmes, problèmes), avec une prépondérance pour les mathématiques discrètes. Cette pratique de la démarche scientifique[2] s'inscrit dans les curricula actuels qui axent sur la démarche mathématique, mais aussi la démarche d'investigation en sciences (nous n'aborderons pas ici la distance épistémologique réelle qui existe entre ces deux démarches, mais elle serait à analyser afin d'anticiper les « nouvelles » pratiques des enseignants, pratiques encore en construction).

Notre objet d'étude. Nous allons donc nous pencher plus spécifiquement sur « l'activité de définition », c'est-à-dire tout processus impliquant la construction de définitions, de l'amorce de la résolution d'un problème à la construction formelle de théories. L'étude de l'activité de définition occupe une place discrète mais récurrente dans les travaux internationaux, depuis les années 90 : déjà soulignée - plutôt du côté formel - par Mariotti & Fischbein en 1997[3], elle apparaît dans des travaux plus récents comme un moyen d'appréhender les concepts mathématiques, dans une nouvelle perspective d'enseignement. Cela recouvre, dans la littérature internationale, les expressions suivantes : *defining, defining processes, definitional procedure, defining activity*[4]. Dans notre recherche, il s'agit d'identifier les situations et concepts propices à la construction de définitions et à la dialectique entre le processus de définition et le processus de preuve, mais aussi de modéliser l'activité de définition et bien de la considérer comme une partie de l'activité mathématique permettant d'ouvrir de nouveaux problèmes pour la recherche en didactique des mathématiques. Au niveau théorique, des cadres spécifiques pour l'étude de l'activité de définition commencent à émerger. Certains exploitent la méthode des *Preuves et Réfutations* de Lakatos (notée dorénavant P&R), d'autres développent des outils de nature cognitive. Ce qui est certain, c'est que l'étude de ces différents cadres de travail et des expérimentations mettant en jeu une activité de définition est nécessaire aujourd'hui afin d'évaluer de manière scientifique les potentialités didactiques de ce type de situations.

Intérêts de l'étude de l'activité de définition. Placer les définitions au centre d'une activité mathématique de construction de connaissances et de preuve se révèle pertinent et productif à deux niveaux (au moins).

- Le premier niveau est bien sûr d'ordre **épistémologique** : la construction de définitions est l'une des composantes de l'activité du chercheur. Certains chercheurs se sont penchés sur la caractérisation des heuristiques et attitudes des mathématiciens (par exemple : Burton, 2004 ; Carlson & Bloom, 2005 ; Schoenfeld, 1985), mais très peu de travaux portent sur une modélisation effective du processus de définition. Nous allons donc approfondir ce point en recherchant notamment s'il existe des types de problèmes spécifiques à l'activité de définition et si différents moments de l'activité du mathématicien interviennent dans un processus de définition, en lien avec l'activité de preuve.

- Le second est d'ordre **didactique** : le processus de définition a été peu investigué en tant que tel dans la communauté didactique internationale. La synthèse des travaux existants montre trois types de recherches :

  - des reprises récurrentes du travail de Lakatos, qui apparaît comme prédominant (notons ici les travaux de De Villiers, Lampert, Sriraman, mais aussi Larsen, Zandieh et Rasmussen),

[2] « (...) une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories … » (Brousseau, 1982, p. 186).
[3] "(...) learning to define is a basic problem of mathematical education." (Mariotti & Fischbein, 1997, p. 219).
[4] Ces expressions, très semblables, pourraient être imparfaitement traduites par : définir, processus définissants, procédure définissante, activité de définition. Il en ressort une préoccupation certaine autour de « l'activité de définition ».

- une dimension cognitive découlant des travaux de Freudenthal (par exemple, les travaux de Larsen, Zandieh et Rasmussen),
- et une modélisation de conceptions sur la construction de définitions (les travaux de Ouvrier-Buffet).

Il n'existe pas à ce jour d'état des lieux de ces travaux, ni d'analyse des points de convergence et de compatibilité didactique. Nous nous proposons de le réaliser ici, ce qui nécessitera d'expliciter les cadres théoriques sous-jacents à ces différents travaux, mais aussi de conduire une analyse de leur pertinence didactique. De plus, dans ces différents travaux, les aspects philosophiques et/ou épistémologiques sont présents, mais très souvent diffus, voire inexploités ; la dimension critique de ces apports épistémologiques reste, à notre avis, insuffisamment développée pour une exploitation didactique efficace. Ainsi, les outils didactiques pour la conception, l'analyse et la transmission de situations de classe impliquant une activité de définition (du secondaire au supérieur, ainsi qu'en formation des enseignants) sont à approfondir et nous allons proposer ici une modélisation de l'activité de définition ainsi que ses potentialités didactiques. En arrière-plan de l'étude de l'activité de définition se trouve toujours la question suivante qui guide notre recherche : peut-on mettre en évidence une hiérarchie du point de vue de la genèse des définitions, peut-on provoquer leur évolution et ainsi proposer une voie d'accès à la construction de concepts ?
Nous parlerons indifféremment d'activité de définition, de processus de définition, et de Situations de Construction de Définitions (notées SCD) : il sera toujours question d'une construction réelle de définitions.

Nous allons tout d'abord préciser notre objet d'étude, qui concerne à la fois le concept de définition en mathématiques et l'activité de définition (partie I). Nous présenterons ensuite une synthèse critique des travaux existants sur le sujet afin d'enrichir notre modélisation de l'activité de définition (partie II). L'enrichissement de notre modélisation au regard des travaux présentés et d'entretiens avec des mathématiciens sera argumenté et ouvrira une méthodologie pour la conception et l'analyse de situations impliquant une activité de définition (partie III). La conclusion ouvrira de nouvelles perspectives scientifiques.

I - L'objet d'étude : le concept de définition et l'activité de définition

I-1. Une étude épistémologique de la définition

Activité de définition et preuve. Thurston (1994) souligne que les mathématiques ne sont pas seulement un ensemble de définitions-théorèmes-preuves, mais que ce sont aussi un lieu pour revisiter des concepts et construire des preuves non formelles. Il considère en effet qu'il est vide de sens, pour le mathématicien, de produire des preuves complètement formelles. Werndl (2009) nous rappelle que de nombreux philosophes soutiennent que les définitions mathématiques ont pour fonction de circonscrire des idées préformelles. Tappenden (2008a, 2008b) conclut sur l'importance de considérer des définitions « naturelles » et de s'abstraire des règles de la logique pour se concentrer sur les connaissances mathématiques, et souligne à quel point l'étude de l'activité de définition est complexe. Ainsi, dans une activité mathématique (de preuve ou de définition) qui se veut davantage heuristique que formelle, l'exploration de questions intuitives, déjà soulignée par Uhlig (2002) prend son importance : « Que se passe-t-il si ? Pourquoi cela se produit-il ? Comment émergent ces différents cas ? Qu'est-ce qui est vrai ici ? » etc.
La liste pertinente des fonctions de la preuve et du processus de preuve dressée par Hanna (2000, p. 8) pourrait être reprise pour le processus de définition. S'y trouvent, en effet, différents moments de l'activité mathématique de preuve, qui, nous le verrons dans l'étude épistémologique, interviennent aussi dans une activité de définition :

- la vérification (de la vérité d'un énoncé) ;
- l'explication
- la systématisation (l'organisation de résultats en un système déductif d'axiomes, concepts, théorèmes)
- la communication de connaissances mathématiques
- la construction d'une théorie empirique
- l'exploration du sens d'une définition ou des conséquences d'une hypothèse
- l'intégration d'un fait dans un nouveau cadre, et ainsi l'exploration d'une nouvelle perspective.

Les liens entre l'activité de définition et le processus de preuve se dessinent donc. Lakatos (1961, 1976) a noté l'importance de la définition chez les chercheurs où les définitions sont construites dans une communauté avec la caractéristique principale d'être provisoires et évolutives, et où la preuve est une expérience mentale et non une activité formelle. Différents éléments entrent en interaction dans la présentation de Lakatos de l'activité mathématique : la conjecture, la preuve de la conjecture, mais aussi d'autres preuves[5], les définitions en construction, et les lemmes cachés qui permettent l'émergence de nouveaux concepts. C'est pourquoi nous étudierons tout particulièrement la complexité des situations retenues par Lakatos et modéliserons le processus de définition lakatosien. Remarquons que le processus de P&R de Lakatos a aussi fait l'objet d'une modélisation algorithmique (Pease, 2007), en ce qui concerne le traitement des contre-exemples qui est effectivement systématisable. Le processus de définition quant à lui l'est beaucoup moins, nous y reviendrons en faisant le choix d'un outil de modélisation approprié.

Activité de définition et formation de concepts. Tappenden (2008a, 2008b) questionne justement l'aspect épistémologique de la définition, et souligne l'importance d'une étude épistémologique des définitions car, dans la pratique, les définitions marquent l'avancée de la connaissance. Tappenden (2008a, 2008b) essaie d'identifier des éléments pour décrire la pratique mathématique, mais reste au niveau de l'analyse d'exemples. Il considère des situations de classification, de preuve, de choix de théorie (choisir une théorie plus fructueuse qu'une autre est une activité qui, d'après Kuhn, a été insuffisamment étudiée), situations que nous allons retrouver dans la modélisation par les conceptions déjà proposée dans Ouvrier-Buffet (2003a). Une épistémologie axée sur les définitions permet en fait d'identifier des concepts en germe au niveau historique, et donc d'avoir un accès à la formation de concept, ce qui a clairement des impacts au niveau didactique. Cette dialectique entre construction de définition et formation de concept a été identifiée par Frege, nous allons en donner une illustration rapide. Tappenden (1985) nous rappelle que Frege (voir par exemple Frege, 1979) considérait ce qu'il appelait les définitions fructueuses. L'utilisation du terme « définition » était en fait polysémique chez Frege, et comprenait à la fois une dimension logique, une dimension langagière (une définition vue comme une abréviation) et une dimension heuristique (de formation de concept). Cherchant à échapper à la dimension langagière et logique (et entrer en fait en opposition avec Kant), Frege a alors insisté sur l'usage des définitions pour rendre possible et construire de nouvelles preuves, et sur les connexions entre des concepts et des faits. Nous entrevoyons également dans les textes de Frege l'opportunité de jouer sur les différentes représentations d'un concept, et de définir un concept pour aller au-delà dans l'exploration, ce qui rejoint les propos des mathématiciens, comme nous le verrons plus loin. Tappenden (1995) nous rappelle l'exemple de la continuité uniforme donné par Frege, où Frege avait identifié les quantificateurs comme centraux dans cette problématique de la continuité et de la convergence : l'accroissement de la connaissance

[5] Remarque : les preuves améliorent une conjecture, même si elles ne la prouvent pas.

vient ici de l'étude de nouveaux schèmes émergeant de l'étude des quantificateurs. Ce n'est pas sans rappeler le processus des P&R et l'émergence de lemmes cachés, nous y reviendrons.

L'activité de définition peut ainsi intervenir à différents moments d'une recherche en mathématiques, moments en interaction constante où se jouent : la « première rencontre » (expression que nous allons préciser ci-après) avec un concept ou système de concepts, la définition de ceux-ci, la preuve, la construction de théories. Souvent, les recherches épistémologiques et didactiques se concentrent sur la preuve. Nous allons ici considérer le concept de définition, et donc la « première rencontre » avec ce concept, mais aussi la façon de le construire. Ce concept est clairement **transversal** aux mathématiques et difficile à appréhender. L'activité de définition sera quant à elle plus accessible, et c'est pour cela que nous parlerons essentiellement de l'activité de définition pour accéder à la construction du concept même de définition. Nous ne reviendrons pas sur les différentes typologies des définitions qui existent en philosophie et logique notamment, car elles sont insuffisantes pour étudier l'activité de définition (voir Ouvrier-Buffet, 2003 & 2007 pour plus de détails sur ces typologies et leur portée).

L'enjeu est donc de parvenir à une modélisation prenant ses sources au niveau épistémologique, mettant en évidence la dialectique entre l'activité de définition et l'activité de preuve, et cela dans une perspective didactique (conception, analyse et transmission de situations de définition).

Au niveau épistémologique, la principale question de recherche est la suivante :
Comment modéliser l'activité mathématique de définition au sein de l'activité mathématique ?

Nous allons développer les axes de recherche suivants :

- Nous allons instrumenter le travail de Lakatos, et en proposer une étude fine avec une modélisation sous la forme de conceptions (Balacheff & Margolinas, 2005) ; deux autres conceptions (celles de Popper et d'Aristote) se révèlent nécessaires pour circonscrire l'activité de définition, nous les décrirons également.
- La dialectique définition-preuve, difficile à caractériser et à intégrer dans la modélisation, sera étayée par une analyse de l'activité des chercheurs via des entretiens. Ces entretiens, centrés sur l'activité de définition dans la pratique des mathématiciens, permettront d'apporter une validation de la modélisation des conceptions mais aussi d'enrichir cette modélisation par une présentation globale de l'activité de définition.
- La modélisation permettra ainsi de proposer une explicitation des processus de définition en balisant la formation d'un concept par différents types de définition et en mettant en évidence des invariants à l'œuvre dans une telle activité.
- Les types de problèmes et concepts mathématiques « propices » (ou disons plutôt « se prêtant mieux ») à une activité de définition seront décrits.

I-2. Questionnements didactiques

La question qui découle naturellement de l'étude épistémologique est la suivante : Comment rendre la modélisation épistémologique appropriée (choix, portée, limites) pour un usage didactique ?

Précisons ici les points d'appui et axes de recherche qui sont développés dans ce document :

- En ce qui concerne la modélisation épistémologique, nous allons considérer le niveau des μ-conceptions (Balacheff & Margolinas, 2005) pour décrire un ensemble de conceptions complémentaires et opérationnelles pour concevoir, analyser et gérer des situations impliquant une activité de définition. Nous allons également approfondir la définition des problèmes impliquant une activité de définition en nous inspirant du cadre de Garey & Johnson (1979) repris par Giroud (2011) lors de la définition de concept-problème ;
- La convergence des travaux didactiques existants sur l'activité de définition et de leurs cadres théoriques sera instrumentée pour enrichir la modélisation et lui conférer une dimension didactique. Les apports de ces travaux quant aux types de problèmes et processus de définition seront également intégrés à la modélisation de l'activité de définition ;
- Les résultats expérimentaux existants, montrant en particulier la faisabilité de la construction de définitions (à différents niveaux de classe), et l'opérationnalité de notre modélisation, serviront de validation extrinsèque de la modélisation ;
- La modélisation finale permettra d'envisager, en classe, une activité de définition, en proposant une méthodologie d'implémentation de situations de construction de définitions, et ouvrira des perspectives quant à la formation des enseignants.

À ce sujet, au niveau de l'institution « enseignement », soulignons la place grandissante qu'occupent les démarches « d'investigation » aujourd'hui dans les curricula. En effet, les programmes, en France, au niveau secondaire notamment, ont évolué cette dernière décennie, préconisant un enseignement des mathématiques via une démarche mathématique. Cela se fait en parallèle des démarches d'investigation dans l'enseignement des sciences, mais avec des intersections non vides, ce qui n'est pas sans poser des questionnements didactiques, les épistémologies sous-jacentes à ces démarches étant différentes en sciences et en mathématiques. Revenons sur la question de l'activité de définition, celle-ci s'inscrivant dans une activité mathématique. Les conceptions des enseignants sur l'activité mathématique en général et sur l'activité de définition en particulier ont-elles évolué sous l'influence de ces nouvelles préconisations curriculaires ? Nous ouvrirons des perspectives sur ce point (à l'aide de résultats de deux questionnaires sur le sujet, conduits en 1999 et en 2013), mais aussi sur l'appropriation de nouveaux « savoirs » par les enseignants : que ce soit des savoirs notionnels, tels que les graphes ou l'algorithme, eux aussi introduits dans ces dix dernières années, ou des savoirs transversaux aux mathématiques, tels que la démarche mathématique ou l'activité de définition.

I-3. La question de la « première rencontre » avec l'activité de définition

Nous reprenons l'un des éléments soulignés par Chevallard (1998) pour définir plus précisément ce que nous entendons par « première rencontre » avec l'activité de définition. Nous considérons ce moment comme important et nous l'avons déjà évoqué en considérant le concept de définition. Définissons-le plus précisément.

La théorie anthropologique du didactique considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche d'un certain type, au moyen d'une technique, justifiée par une technologie qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie. Chevallard (1998) parle de praxéologie pour modéliser ainsi l'activité mathématique. On parle de praxéologie mathématique – ou d'organisation mathématique (OM) – lorsque les types de tâches relèvent des mathématiques. On parle de praxéologie didactique – ou d'organisation didactique (OD) – lorsque les types de tâches sont des types de tâches d'étude. Dans les OD, différents moments didactiques sont identifiés (Chevallard, 2001, p. 12) :

- La (première) rencontre avec un type de tâches ;
- L'exploration du type de tâches et de l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches ;
- La constitution de l'environnement technologico-théorique ;
- L'institutionnalisation ;
- Le travail de la technique (travail de l'OM) ;
- L'évaluation.

Parmi les questions posées par Chevallard (1998), nous retrouvons celle de l'organisation de la « première rencontre » avec une OM. Dans notre étude, cette « première rencontre » s'avère elle aussi cruciale : elle est double car il s'agit de la « première rencontre » avec une activité de définition, mais aussi de la « première rencontre » avec un concept (le concept de définition, mais aussi le(s) concept(s) mathématique(s) considéré(s)). Une telle activité (de définition) n'ayant *a priori* pas encore été fréquentée par les étudiants, il est nécessaire d'aménager cette « première rencontre » avec le concept de définition (à l'image de celle proposée par Chevallard (1998)), afin de leur permettre d'engager un processus de définition et de le conduire à bien. L'objectif principal de cette « première rencontre », au sens où nous l'entendons, est de permettre aux étudiants de réussir dans une situation de construction de définitions et de commencer à identifier certains invariants de leur processus. Dans la perspective de la conception d'une situation fondamentale pour la construction de définitions, apparaît alors l'importance d'intégrer une situation de « première rencontre » avec l'activité de définition. Nous y reviendrons dans ce document. Nous ne développerons pas une étude de la définition sous l'éclairage théorique des praxéologies ici, mais ouvrirons des perspectives de recherche sous cet angle.

I-4. Les différentes étapes pour accéder à notre modélisation de l'activité de définition

La modélisation de l'activité de définition en mathématiques présentée dans ce document représente l'aboutissement de notre recherche et constitue un point de départ pour de nouvelles expérimentations en didactique, mais aussi de nouvelles explorations épistémologiques et historiques d'émergence de nouveaux concepts mathématiques. Chronologiquement, elle a été conçue en différentes phases, et elle comprend quatre composantes que nous allons présenter en partie III.

Nous avons tout d'abord identifié trois conceptions emblématiques permettant de décrire l'activité de définition. Les auteurs qui nous ont servi de point d'appui étaient nombreux : nous avons choisi de qualifier les conceptions de lakatosienne, aristotélicienne, et poppérienne, les travaux de ces trois auteurs alimentant majoritairement les conceptions en question. La première composante de notre modélisation est ainsi constituée de ces trois conceptions épistémologiques de l'activité de définition, enrichies et validées par les travaux en didactique existants par ailleurs et les entretiens avec des mathématiciens.

Dans une deuxième phase, nous avons pu procéder à une validation de cette modélisation initiale par des expérimentations, en montrant en particulier l'efficience de celle-ci pour anticiper et décrire les processus définissants des étudiants. Ces expérimentations ont aussi permis de compléter notre modélisation.

Dans une troisième phase, nous avons recensé et analysé l'ensemble des travaux existants à ce jour (en 2013) sur l'activité de définition. Nous y reviendrons en détail dans la partie II.

Dans une quatrième et dernière phase, nous avons conduit des entretiens avec des mathématiciens, et ainsi pu enrichir notre modélisation par l'apport de deux autres composantes :

- une meilleure définition des problèmes, présentée séparément des conceptions, permettant également de générer de nouveaux problèmes impliquant une activité de définition ;
- la description de quatre moments de travail sur la définition (issue des entretiens avec des mathématiciens) : cette composante investit en particulier le moment « en-acte » qui n'est pas présent dans la modélisation via les conceptions, ainsi que trois autres moments de travail sur la définition (« zéro », « formalisé » et « axiomatique ») où les conceptions se révèlent encore opérationnelles. Ces moments de travail sur la définition ne sont pas hiérarchiques, mais coexistent et interagissent. Ils sont donc éclairés en partie par les conceptions, ils montrent comment celles-ci s'articulent et interviennent simultanément dans l'activité de définition, et ils complètent la modélisation par les conceptions.

La dernière et quatrième composante, que nous avons décidé d'intégrer à notre modélisation de l'activité de définition, propose une méthodologie pour concevoir et analyser des situations impliquant une activité de définition.

Nous allons reprendre ici ces différentes phases et ainsi montrer la progression dans la modélisation de l'activité de définition en mathématiques.

II - Différentes voies pour modéliser l'activité de définition : présentation critique et ouvertures

II-1. Conceptions de chercheurs, d'étudiants et d'enseignants sur la définition

L'objectif principal de l'état de ces conceptions (ce terme est à prendre dans une acception usuelle et non théorique) est de mettre en évidence ce que sont des définitions mathématiques pour des étudiants et enseignants et de rapporter deux stratégies de définitions déterminées par Zaslavsky & Shir (2005) lors d'une étude sur les conceptions justement.

Conceptions de chercheurs travaillant sur les conceptions d'étudiants sur la définition. Zaslavsky & Shir (2002, 2005) précisent ce que doit être une définition, ce qui conditionne implicitement leur façon de construire des questionnaires afin de déterminer les conceptions d'étudiants ou d'enseignants sur les définitions en mathématiques.

Pour eux, une définition doit être :

- non contradictoire ;
- non ambigüe ;
- indépendante des représentations ;
- non circulaire (éviter le cercle vicieux et définir en amont les termes qui la composent) ;
- minimale.

Nous trouvons davantage de précisions sur les critères des définitions dans Van Dormolen & Zaslavsky (2003), sur l'exemple de fonction périodique. Dans ce texte, une définition doit satisfaire plusieurs critères :

- sur le plan logique, elle doit satisfaire les critères :

    - de hiérarchie (issu d'Aristote : il s'agit de définir en amont les termes nécessaires) ;
    - d'existence ;
    - d'équivalence (la preuve de l'équivalence de caractéristiques doit être établie, une définition est retenue, les autres caractéristiques étant des théorèmes) ;
    - d'axiomatisation (une définition doit être un élément d'une théorie axiomatique) ;
- et sur le plan des habitudes (culture commune, partagée par tous)
    - de minimalité ;
    - d'élégance ;
    - de dégénération : il s'agit du cas où l'on ne veut pas inclure certains cas particuliers dans la définition d'un concept (par exemple pour définir les polynômes du second degré ax^2+bx+c, on exclut le cas $a = 0$).

Conceptions d'étudiants. Zaslavsky & Shir (2002) propose une étude de conceptions d'étudiants sur les définitions « acceptables » en géométrie. Elles utilisent le même questionnaire pour des élèves et pour des enseignants, où huit énoncés relatifs au carré sont proposés : ceux-ci sont à accepter ou rejeter comme définition du carré, et une explication est demandée. Zaslavsky & Shir (2002) répertorient ainsi les arguments des étudiants (de 12 ans) suivant trois critères : des critères mathématiques, des critères perceptifs et des critères relatifs à la fonction de communication d'une définition. Ainsi, les justifications mathématiques des élèves, pour accepter ou rejeter une définition s'attachent à étudier si l'énoncé est bien une condition nécessaire et suffisante, s'il est équivalent à une définition connue, s'il est utile (aspect opératoire), s'il est minimal, s'il est basé sur des concepts connus. La fonction de communication d'une définition fait ressortir différentes exigences pour les définitions de nature langagière chez les étudiants : une définition doit être simple, claire, courte, élégante, familière.

Les travaux de Zaslavsky & Shir (2005) mettent également en évidence deux stratégies chez des étudiants de 12 ans pour définir des concepts familiers (rappelons qu'il s'agit de concepts géométriques). Il s'agit de :

- l'*example-based reasoning* : des exemples (ou non-exemples[6], ou contre-exemples) sont ici utilisés par les étudiants pour se convaincre ou convaincre autrui de la validité d'un énoncé, pour déterminer les frontières d'un concept, pour exclure un énoncé comme définition d'un concept ;
- le *definition-based reasoning* : pour accepter ou rejeter une définition, les étudiants se réfèrent à des caractéristiques des définitions, au rôle des définitions en mathématiques (celles et ceux évoqués dans le paragraphe précédent).

Nous retrouvons certains de ces aspects dans les activités proposées par Borasi (1992), où les deux étudiantes (14 ans) prenant part aux expérimentations considèrent les mathématiques comme quelque chose de prédéterminé, il existe « une bonne définition quelque part » (Borasi, 1992, p. 67). Lors des activités, ces mêmes élèves recherchent la meilleure définition possible, la plus universelle, tendent à vouloir une définition précise, marquant la nouveauté (ibid. p.74).

Conceptions d'enseignants. Zaslavsky & Shir (2001) exploitent le même questionnaire avec les enseignants (34 enseignants du secondaire) que celui utilisé avec les étudiants. Il ressort de

[6] Un non-exemple est un énoncé non équivalent à la définition, et/ou ne vérifiant pas l'une des caractéristiques fondamentales de la définition.

cette étude des conceptions que nous reclassons suivant des conceptions langagières, logiques et pédagogiques, ou plutôt cognitives en fait. Les conceptions d'un niveau logique comprennent les éléments suivants : une définition est une condition nécessaire et suffisante, elle doit être minimale, non redondante et constituée à partir de mots déjà définis antérieurement. Les conceptions langagières s'intéressent au fait qu'une définition doit être claire, simple, familière. À noter que la *familiarité* à l'égard d'une définition comprend deux aspects liés : une définition n'utilisant que des termes déjà connus apportera aux élèves une certaine familiarité ; de plus, ce qui suit renforce celle-ci. Ce que nous avons appelé aspects pédagogiques reprend le point suivant développé par les enseignants : il ne faut pas faire intervenir dans une définition des éléments ne semblant pas appartenir à l'objet à définir (comme les diagonales dans un carré). Enfin, l'intérêt pour des définitions procédurales est noté, bien que l'usage fait que celles-ci sont peu nombreuses : notons qu'en particulier, de telles définitions règlent la génération de l'objet défini et ainsi le problème de l'existence, ce qui ne semble pas ressortir chez les enseignants d'après Zaslavsky & Shir (2001).

Notre étude (Ouvrier-Buffet, 2003a), davantage centrée sur le processus de définition que les travaux de Zaslavsky & Shir (2001, 2003, 2005), nous permet de compléter le panorama précédent sur les conceptions des enseignants (enseignants du secondaire), de la façon suivante :

- Nous retrouvons les aspects logiques et langagiers tels : l'existence et l'unicité à vérifier ; la redondance, le formalisme excessif, et le cercle vicieux à éviter ; l'aspect « dénomination » prédominant.
- Les fonctions des définitions données par les enseignants concernent quant à elles : utiliser une définition dans une démonstration (pour régler des inférences) ; abréger le discours (raccourci de langage) ; préciser le sens d'un mot nouveau ; résoudre un conflit, lever une ambigüité.
- Une place reste possible pour la construction de définitions, même si les enseignants parviennent difficilement à la cerner : ils proposent généralement des activités de redéfinition de concepts familiers.

II-2. Lakatos – Portée et limites – Vers un modèle pour des analyses didactiques

Contexte philosophico-épistémologique. Lakatos reconnaît qu'il utilise trois sources idéologiques majeures, *a priori* incompatibles, dans son cadre théorique : les heuristiques mathématiques de Pólya, la dialectique d'Hegel, et le faillibilisme de Popper (Lakatos, 1961, Archive, 3.4). Sa pensée a évolué et a pris différentes formes pendant sa carrière, en fonction de ses implications politiques (reprenant par exemple des aspects du marxisme coïncidant avec l'élaboration d'une méthode scientifique) et philosophiques (nous ne détaillerons pas ces éléments qui nous conduiraient trop loin ici). Indiquons cependant synthétiquement l'utilisation de Hegel, Pólya, et Popper par Lakatos.

L'intégration de la philosophie d'Hegel est caractérisée par sa recherche de propositions dynamiques (en construction) s'inscrivant dans le schème « thèse – antithèse – synthèse ». Lakatos y ajoute la dimension des heuristiques (empiriques), reprise de Pólya. À l'image d'Hegel, Lakatos recherche l'essence des mathématiques, indépendamment des mathématiciens, c'est-à-dire au-dessus de la pratique, pour modéliser une recherche mathématique. Cela le conduit à l'élaboration de programmes de recherche scientifiques, proposés ultérieurement (Lakatos, 1980).

De Popper, il reprend principalement le fait que la construction en mathématiques passe par des conjectures, des expérimentations, des réfutations et preuves. Lakatos étend le faillibilisme de Popper aux mathématiques en considérant que les mathématiques relèvent du quasi-empirisme et qu'une réfutation ne doit pas entraîner un rejet immédiat de la conjecture. C'est ainsi que Lakatos fera un gros plan sur les preuves et réfutations, mais aussi les définitions, en mettant en évidence, en particulier, différentes méthodes de traitements des contre-exemples (les « monstres »). Remarquons que Lakatos n'oppose pas mathématiques et sciences dans la construction de son « programme de recherche scientifique ». Nous retrouvons également une dose de faillibilisme lorsque Lakatos explicite qu'une recherche ne s'arrête jamais.

De Pólya, Lakatos retient que les mathématiques sont une science inductive intégrant différents processus : une exploration des problèmes, une utilisation d'exemples, des généralisations, la mobilisation de contre-exemples, des expériences mentales permettant d'invalider des généralisations, et des réfutations qui précèdent le travail sur la preuve. La découverte mathématique suit ainsi des schèmes qui sont à expliciter.

Les trois niveaux que nous trouvons chez Hegel (thèse – antithèse – synthèse), mais aussi chez Kuhn (activité scientifique « normale » – crise – révolution) se traduisent ainsi chez Lakatos : essais/erreurs, preuves, programme de recherche scientifique.

Nous renvoyons le lecteur aux excellents documents (Kampis et *al*., 2002 ; Motterlini, 2002 ; Koetsier, 1991) pour une investigation complète et poussée de la complexité de la pensée de Lakatos et des influences qui ont pesé sur sa réflexion.

La notion d'heuristique(s) chez Lakatos. Lakatos a repris la notion d'heuristiques de Pólya, qui recouvre toute « astuce » et processus permettant d'obtenir des conjectures et idées d'une preuve, dans le cadre du raisonnement plausible. En définitive, cette notion est assez proche de celle de l'*ars inveniendi*[7] (Larvor, 1998, p. 14). Implicitement, Lakatos définit les heuristiques « négatifs », qui sont un moyen d'identifier les pistes de recherche à éviter, et, de manière similaire, les heuristiques « positives » qui nous renseignent sur les pistes de recherche à explorer. Le terme d'heuristiques revêt, à la fin de P&R, une dimension plus importante, car cela concerne l'étude de la croissance de la connaissance conceptuelle au travers d'une argumentation impliquant preuves et réfutations centrée sur la dialectique. Pour Lakatos, cette dialectique comprend notamment tout processus argumentatif par lequel la communauté mathématique étend et remplace des concepts et leurs dénominations dans une construction théorique. Quant aux contre-exemples, dont le rôle est prédominant dans P&R, Lakatos distingue les contre-exemples heuristiques, partie intégrante des P&R, des contre-exemples logiques. Derrière la dénomination d'heuristiques, deux points importants se dessinent : le travail sur la définition et la dénomination de concepts dans une construction théorique, mais aussi toute dialectique permettant au processus de P&R d'évoluer : celles qui nous intéressent particulièrement ici sont la dialectique des contre-exemples et la dialectique entre preuve et définitions.

La méthode des preuves et réfutations et l'activité de définition. Lakatos cherche à présenter des schémas du raisonnement mathématique en s'appuyant sur différentes conceptions épistémologiques et philosophiques traduites par les protagonistes du dialogue de P&R. Directement inspiré par Pólya et Popper (mais aussi Hegel et Carnap), Lakatos s'appuie sur le contexte de la découverte (construction de conjectures) et de la justification (mise à l'épreuve de conjectures). Il reprend en effet une idée de Pólya (le *guessing and testing*)

[7] L'*ars inveniendi* de Leibniz est particulièrement intéressant à indiquer ici. Leibniz y distingue en effet « l'art de définir » (qu'il nomme « analyse ») et « l'art de combiner les définitions » (qu'il nomme « synthèse »). Rappelons également que Leibniz a véritablement développé une théorie de la définition suivant deux axes : le degré de certitude et le degré de difficulté (voir Ouvrier-Buffet, 2003a).

comme un exemple de raisonnement de type inductif en mathématiques, où une conjecture naïve (antérieure à toute preuve en fait) est atteinte par la méthode de Popper des conjectures et réfutations[8]. Un processus de preuve par analyse-synthèse permet de faire disparaître la conjecture naïve au profit de *proof-generated theorems* de plus en plus complexes, de lemmes cachés etc. Nous revenons en détail sur la méthode des P&R en Annexe 2, avec les exemples utilisés par Lakatos. Ce qui nous concerne davantage ici, c'est la place prépondérante donnée aux définitions, qu'elles soient *naïves*, *zéro* ou *générées dans/par la preuve* (les fameuses *proof-generated definitions*[9]), la construction de définitions apparaissant clairement comme un processus de formation de concepts[10]. Tous les concepts mathématiques ne peuvent se prêter à ce processus de preuves et réfutations (cf. la conférence de Conway citée par De Villiers (2000)), mais Lakatos l'annonce clairement dans sa thèse (1961) : il ne prétend pas faire « le » modèle de la construction de la connaissance mathématique. Revenons maintenant sur les caractéristiques de la situation et des processus de P&R afin de déterminer la portée et les limites de ce modèle.

Des outils permettant de baliser une activité de définition. Les trois types de définitions proposés par Lakatos (définitions naïves, zéro-définitions, *proof-generated definitions*) ont pour fonctions respectives de nommer, communiquer un résultat, prouver. Reprenons l'exemple de Lakatos pour illustrer ces différents types de définition sur le concept de « polyèdre ». Il propose une définition naïve (qui n'évoluera pas mais sera remplacée) de polyèdre : un solide avec des faces planes, des arêtes rectilignes. Nous pouvons aussi exemplifier la notion de zéro-définition (il en existe plusieurs dans le travail de Lakatos) dans ce même contexte de construction de classe d'objets vérifiant la formule d'Euler : solide dont la surface est constituée de faces polygonales. Mais le cube creux est un contre-exemple. La zéro-définition va ainsi évoluer. Le travail décrit dans (Ouvrier-Buffet, 2006) permet d'avoir une autre illustration du rôle et de l'évolution des zéro-définitions. Donner un exemple de *proof-generated definition* est plus délicat, car il faudrait expliciter une preuve et la dialectique entre cette preuve et la définition (et même les définitions) en construction.

Ainsi, une définition naïve peut être établie au début d'une recherche mais ne peut évoluer, contrairement à une zéro-définition qui marque réellement le début de l'activité de définition et du processus de recherche à proprement parler. Une zéro-définition est adoptée, à titre d'essai, au début du processus de recherche, mais n'affecte pas le domaine de la preuve (Lakatos, 1961, p. 68-75) ; une zéro-définition peut être modifiée pour protéger la conjecture d'un « monstre » ou parce que le concept est modifié par la présentation d'une preuve. La construction d'un système de concepts est alors engagée, et le stade de *proof-generated definition* ne sera atteint que grâce à l'idée de la preuve. Il demeure cependant que le stade des zéro-définitions est déjà très avancé puisqu'il prend déjà en compte la preuve en jeu : il apparaît en effet comme un outil théorique efficace permettant de conduire des analyses mathématiques et didactiques (voir le paragraphe II-3.4 ci-après). L'idée séduisante des *proof-generated definitions* réside dans le fait qu'elles tentent de relier la construction de concepts et la validation de définitions à la preuve : ce point reste à explorer plus en profondeur, car la situation proposée par Lakatos ne permet pas d'aller vers la généralisation d'un processus permettant de passer des zéro-définitions aux *proof-generated definitions*, processus qui tend à expliciter les fameux lemmes cachés[11] : il s'agit de lemmes que l'on

---

[8] Soulignons ici que Popper cherchait à traduire le progrès scientifique en développant une méthodologie, en sciences. La méthodologie des conjectures et réfutations proposée par Popper en sciences, et le fait que Popper suggère de placer la découverte mathématique dans une configuration expérimentale ont inspiré Lakatos.

[9] Traduites par « définitions éprouvettes » dans la version française de *Preuves et réfutations* de Lakatos (1984).

[10] "A definitional procedure is a procedure of concept formation." (Lakatos, 1961, p. 54).

[11] Lakatos donne l'exemple suivant. Il considère la conjecture « la limite d'une série convergente de fonctions

recherche dans l'examen de la preuve pour faire face à un contre-exemple global non local, dont le traitement par d'autres méthodes, notamment celles de *monster-barring* et *exception-barring* (voir ci-après), s'est révélé insatisfaisant. La question se pose donc de l'existence d'autres processus potentiels caractérisant l'activité de définition et de preuve[12].

Nous reprenons ici la présentation très claire de Werndl (2009, p. 4-5) afin de revenir sur le processus de P&R et sur les différents traitements de ce que Lakatos appelle les « monstres ». Les traitements des « monstres » sont au nombre de quatre, et, habituellement, seuls les deux premiers sont mis en avant dans les écrits présentant les travaux de Lakatos. Les deux derniers sont explicités dans Lakatos (1980). Ces traitements sont tous indépendants de la preuve de la conjecture et se concentrent sur la validation de la définition de la façon suivante :

- Les trois premiers traitements de « monstres » instrumentent les contre-exemples. Il s'agit des méthodes appelées :
    - *monster-barring* (traduit dans Lakatos (1984) par « relégation de monstres ») : est exclu de la définition une classe d'objets contenant les contre-exemples ;
    - *exception-barring* (traduit dans Lakatos (1984) par « relégation d'exceptions ») : est exclu de la définition une classe d'objets qui est la classe des contre-exemples ;
    - *monster-adjustement* (ce que l'on pourrait traduire par « réajustement ») : les termes de la définition sont réinterprétés pour que les contre-exemples n'en soient plus ;
- le quatrième traitement de « monstres », appelé *monster-including* (ce que l'on pourrait traduire par « inclusion »), où l'on défend la définition en l'étendant (en incluant une nouvelle classe d'objets), en réfère quant à lui à un processus de généralisation de la conjecture.

Nous reprendrons ces éléments afin de compléter la modélisation de la conception lakatosienne présentée dans le paragraphe II-3.3.

Une situation initiale conséquente, avec des caractéristiques fortes (qui seraient des contraintes fortes au niveau didactique). La situation initiale[13] est en fait une situation de classification (délimitation du concept de polyèdre), comprenant une conjecture initiale (avec la formule d'Euler), une première représentation des objets mathématiques en jeu (les polyèdres sont en effet déjà connus des « élèves », au moins dans une appréhension perceptive[14] avec des définitions de travail), une nouvelle preuve (celle de Cauchy, dans le cadre de la topologie algébrique). Lakatos parle de traduction quand est introduit le cadre de la topologie algébrique : ce n'est pas seulement l'analyse de la preuve qui conduit à un *proof-generated concept*, c'est aussi la traduction, que l'on pourrait qualifier de changement de cadre. La nouvelle preuve avec le changement de cadre (et l'aspect « traduction ») va ainsi

continues est une fonction continue ». Cette conjecture ne peut être prouvée que si l'on considère la convergence uniforme (et non la convergence « ordinaire » de Cauchy). Ainsi, la définition de la convergence uniforme est qualifiée de « *proof-generated* » : il s'agit d'une définition qui provient de ce que Lakatos appelle les « lemmes cachés » (qui émergent lors de la recherche des conditions pour la validité d'une conjecture). (Lakatos, 1984, p. 170-172).

[12] Kvasz (2002, p. 215-216) propose d'ajouter un autre processus, en contrepartie de celui de l'incorporation de lemme(s) : il s'agit de l'exclusion de lemme(s). Kvasz (2002) prend un exemple où un théorème est énoncé avec six conditions, et sa preuve est construite et valide. On essaie alors d'enlever certaines conditions pour aboutir à un théorème plus fort, et là peut intervenir l'exclusion de lemme(s) (découlant de la méthode *d'exception-barring*). Kvasz (2002) ne précise pas l'impact sur les définitions d'un tel processus.

[13] Lakatos reprit une situation historique déjà proposée par Pólya.

[14] On pourrait ici introduire le concept de *concept image* (voir les travaux de Vinner (1991), décrits ci-après).

valider la zéro-définition et lui conférer d'une certaine façon le statut de *proof-generated definition*. En fait, avant la preuve de Cauchy, la situation pourrait être considérée comme relativement pauvre. Et avec la preuve de Cauchy, il faudrait parvenir à se détacher du seul niveau de la preuve pour aller plus précisément sur la construction de concepts qui serait à requestionner en dehors de la preuve de Cauchy justement. Le changement de cadre est donc loin d'être neutre dans ce processus, et il n'est finalement pas exploité pleinement par Lakatos : en effet, les changements de représentation et de langage liés à un passage de la géométrie à la topologie algébrique ne sont pas suffisamment exploités dans les textes de Lakatos, ce dernier se concentrant sur les lemmes cachés. Les caractéristiques de la situation initiale étant fortes, se pose la question suivante : est-il possible de concevoir des situations impliquant une activité de définition et de preuve moins restrictives que celle de Lakatos ?

Un moment de l'activité mathématique (jusqu'à la formalisation mais sans prise en compte de l'axiomatisation). Lakatos laisse de côté la « première rencontre » avec les objets (et pourtant il parle de définitions naïves), car il s'appuie sur des objets géométriques qui ont déjà une préexistence, des prédéfinitions, et une pré-axiomatique, pour les élèves et le maître, indépendamment de la situation posée dans P&R. Il ne prend pas non plus en charge l'aspect « construction de théorie » (bien qu'une axiomatique locale existe, mais elle provient de la géométrie importée). En réalité, Lakatos ne considère pas le fait qu'une axiomatisation a plusieurs intérêts : l'étude de l'axiomatisation permet de travailler sur la simplification de preuves et de théorèmes, et ainsi la mise en œuvre de nouvelles techniques de preuve. L'axiomatisation, à terme, permet aussi de connecter différents champs de mathématiques *a priori* éloignés, et c'est elle qui aidera à dépasser le cloisonnement des différentes branches des mathématiques (cf. Corfield, 1997[15]). En réduisant trop le rôle des théories pré-axiomatiques, Lakatos montre ainsi ses limites et les champs de recherche possibles en didactique du côté de l'étude des axiomatiques locales qui existent dans des constructions de concepts. En effet, on ne peut parfois faire l'économie d'une axiomatisation pour énoncer certaines conjectures : Stöltzner (2002, p. 180) souligne qu'une axiomatisation, dans les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, semble être une condition préalable à l'accroissement du contenu mathématique, certaines conjectures et heuristiques associées ne pouvant être exprimées qu'après la mise au point d'un cadre axiomatique. Lakatos est lui davantage du côté de la formalisation, car même s'il reconnaît que ce n'est pas une fin en soi (et qu'il met en garde contre toute formalisation prématurée, contrairement à Jaffe & Quinn), il affirme que ce processus est à questionner, notamment en interrogeant ce qu'il ne contient pas.

Une représentation partielle de la construction de concepts : des contre-exemples prédominants – une méthode transposable ? Lakatos pourrait donner l'illusion que la construction de concepts se fait uniquement par modification de la conjecture initiale via des contre-exemples. Il ne faudrait pas croire non plus que seuls les contre-exemples permettent l'examen critique d'une preuve. Pour la situation choisie, il faut tenir compte des éléments donnés au départ et de la gestion du maître, loin d'être neutre. Par ailleurs, Lakatos n'utilise qu'un seul type de preuve de conjecture[16], ce qui montre son attachement à la structure logique et créé un décalage avec sa volonté de montrer des mathématiques informelles.

Concernant la généralisation des P&R, Feferman (1978) argumente que la méthode de Lakatos n'est le reflet que d'une partie de l'activité mathématique, et qu'elle n'est pas transposable à tous les champs des mathématiques. Il prend l'exemple de la théorie continue

---

[15] Lakatos nous met en garde si une théorie préformelle est axiomatisée trop tôt : mais on ne peut faire l'économie d'une axiomatisation pour énoncer certaines conjectures... ("Thus axiomatization facilitates interaction between apparently different areas of mathematics, an essential feature of this century, and has helped to overcome the compartmentalization of earlier centuries." (Corfield, 1997, p. 114)).

[16] $\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x))$

des mesures de probabilités qui progresse sans recours à des contre-exemples et donc sans recours à la méthode des P&R. Hacking (1981) ouvre quant à lui sur de nouvelles façons de raisonner que celle de Lakatos[17], soulignant qu'on ne peut inférer d'un épisode historique des vérités absolues. Cela étant, l'heuristique de la définition, telle qu'elle est présentée dans P&R, reste primordiale pour notre étude. La question de sa généralisation et transposition sera bien sûr posée.

Une réécriture de l'histoire inévitablement artificielle. Il a fallu un siècle (1750-1850)[18] pour qu'hypothèses, définitions et preuve de la relation d'Euler soient correctement formulées, à une époque où les méthodes de recherche en mathématiques prenaient une nouvelle dimension. Ce contexte historique est certes très favorable au travail de conjectures, preuves et réfutations et à l'instrumentation des contre-exemples, mais ce n'est pas toujours le cas, *a priori*, en mathématiques. Certains mathématiciens et didacticiens soulignent que tous les concepts mathématiques ne peuvent se prêter à un processus de P&R comme celui décrit par Lakatos (Hanna, 2007 ; De Villiers, 2000). Revenons succinctement sur la reconstruction historique et son caractère artificiel : Corfield (1997) démontre que Lakatos a pris des libertés par rapport à la reconstruction historique en topologie algébrique qu'il propose. Il exemplifie ses propos ainsi : reprenant l'un des problèmes de l'époque parcourue par Lakatos (Poincaré, Berti, Heegaard), Corfield (1997) montre qu'il ne trouve qu'un seul contre-exemple dans l'*Analysis situs* de Poincaré, contre-exemple qui contredit un lemme et non pas un théorème (Poincaré avait certes reformulé ses preuves mais pas à cause de ce contre-exemple). Ainsi, la méthode des P&R ne décrit pas la dynamique de la recherche mathématique de l'époque. Cette réécriture de l'histoire peut être liée à la volonté de Lakatos d'écarter la (pré)axiomatisation et certaines composantes logiques, mais ce n'est qu'une hypothèse.

Une gestion de la situation par le maître non neutre et pourtant fondamentale. Cette gestion a été pensée par Lakatos pour représenter différents courants mathématiques et philosophiques : la transposition à la classe requiert un travail spécifique du côté de l'identification des leviers que le maître peut utiliser pour catalyser le travail sur la définition (certains de ces éléments ont été décrits dans Ouvrier-Buffet, 2004). On retrouve l'importance des discussions dans la classe dans l'expérimentation de Mariotti & Fischbein (1997), où l'activité de définition ne se fait pas sans discussion collective. La modélisation épistémologique que nous proposons ci-après via la caractérisation de conceptions (telles

---

[17] Hacking évoque les six types de raisonnement de Crombie, à savoir :

> (1) the simple postulation and deduction in the mathematical sciences; (2) experimental exploration; (3) hypothetical construction of models by analogy; (4) ordering of variety by comparison and taxonomy; (5) statistical analysis of regularities of populations; (6) historical derivation of genetic development.

Soulignons que les recherches de Hacking sur la définition sont très orientées sur les situations de classification et de généralisation (notamment en sciences expérimentales) et ne concernent donc pas directement l'étude de l'heuristique de la définition qui nous intéresse ici.

[18] Pour une mise en perspective de cette histoire, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Pont, JC (1974) *La topologie algébrique des origines à Poincaré*. PUF.

Indiquons également, avec cette citation de Corfield (1997), que : "The axioms used by algebraic topologists include those defining types of topological spaces, those defining types of algebraic objects, such as abelian groups and graded rings, and those defining processes going from one type of object to the other. The Eilenberg-Steenrod axioms play the role of definitions picking out what their authors decided was an important class of collections of maps (functors) indexed by the integers from a suitable category of pairs of topological spaces to the category of abelian groups. The principal reason for doing this was to facilitate the proof of general results by focusing on the essential characteristics of the, until then, motley collection of homology theories. Many of the axioms were properties of these homology theories which had been proved for them individually." (Corfield, 1997, p. 116).

celle d'Aristote et Popper) nous permet de cerner en partie la gestion de la situation, afin de faire ressortir ce qui relève spécifiquement de l'apport de Lakatos (Ouvrier-Buffet, 2006).

II-3. Un premier modèle épistémologique de l'activité de définition

II-3.1. Choix d'un outil de modélisation : les conceptions au sens de Balacheff (1995, 2003)

La complexité de la modélisation de conceptions. Artigue (1991) a souligné la complexité de la caractérisation théorique de conceptions, en didactique des mathématiques. Les modèles alors existants étaient difficilement opératoires, car il était quasiment impossible d'inférer, par exemple, de l'observation de l'élève dans quelques situations, la globalité de la conception de l'élève sur tel ou tel objet mathématique. Par ailleurs, les conceptions pouvant être construites dans différentes institutions (scolaires, culturelles etc.), leur caractérisation et leur opérationnalité s'en trouvent complexifiées.

Nous considérons que l'idée générale sous-jacente à l'élaboration d'un modèle pour les conceptions est triple :

- il s'agit de **traduire** la pluralité des « points de vue » sur un concept mathématique, mais aussi l'**adaptation** de tel ou tel point de vue pour résoudre différents problèmes et la définition des **éléments opératoires** permettant la résolution de ces problèmes ;
- cela implique de s'interroger sur le **fonctionnement** des conceptions, sur les problèmes, outils, et signifiants qui les différencient, sur la façon dont elles peuvent permettre d'**interpréter** des erreurs et *misconceptions* ;
- il s'agit aussi, de manière plus globale, de parvenir à **différencier** un savoir mathématique, un savoir à transmettre, un savoir effectivement transmis.

Des modèles pour les conceptions qui s'affinent. Brousseau (1986) décrit un premier « modèle » de conception, où sont mis en évidence deux éléments : un ensemble de règles, pratiques, et savoirs pour résoudre une classe de situations ou de problèmes, et le domaine de validité de cet ensemble.

Artigue (1988) reprend le triplet de Vergnaud (explicité en 1991, mais déjà présent au début des années 80) caractérisant un concept, et constitue un triplet analogue pour définir une conception. Demeure la complexité de son usage, complexité déjà soulignée.

Balacheff (1995, 2003) (voir aussi Balacheff & Margolinas, 2005) développe trois principaux apports à la modélisation des conceptions, sur lesquels nous reviendrons en détail ci-après :

- il reprend le triplet de Vergnaud et ajoute une structure de contrôle (notée Σ) qui s'est révélée nécessaire lors de l'exploration de conceptions dans des EIAH ;
- il introduit la notion de μ-conception pour accéder à un savoir de référence ;
- il démontre l'accessibilité à la caractérisation de savoirs et connaissances via la détermination de conceptions.

Les conceptions au sens de Balacheff. Balacheff (1995), s'inscrivant dans la théorie des situations de Brousseau (1986), considère le système [Sujet <> Milieu] et insiste sur le fait qu'une conception est une propriété émergente des interactions au sein de ce système. Une conception est alors définie comme une « modélisation cognitive rendant compte des régularités des conduites d'un sujet relativement à un cadre. » (Balacheff, 1995, p. 228).

La question se pose au sujet des relations entre « points de vue », « cadres », et « conceptions » : dans la mesure du possible, nous tenterons de les éclaircir au fil du texte. Les cadres, justement, au sens de Douady (1986), sont davantage (à l'origine) du côté des mathématiques : ce qui demeure fondamental, ce sont les transitions entre les cadres, cadres qui ne mobilisent pas les mêmes propriétés et représentations d'un concept. Les systèmes de représentation (et la médiation sémiotique qui sera impliquée lors de transitions entre cadres, en situation) sont en fait des pivots entre cadres et conceptions, ce qui renforce leur importance.

Nous avons donc retenu le modèle de conception de Balacheff (repris dans Balacheff & Margolinas, 2005) qui s'appuie sur la notion de concept de Vergnaud (1991). Deux niveaux d'invariants interviennent : les opérateurs (R) qui permettent d'agir sur la situation et les structures de contrôle ($\sum$) qui justifient et valident l'utilisation des opérateurs. Une dialectique forte existe entre opérateurs et contrôles, nous y reviendrons plus loin. Une conception est alors décrite par un quadruplet (P, R, L, $\sum$) où :

- P est un ensemble de problèmes sur lesquels la conception est opératoire ; P décrit le domaine de validité de la conception.
- R est un ensemble d'opérateurs. Ceux-ci permettent la transformation des problèmes. Ils sont attestés par des productions et des comportements du sujet.
- L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R. À l'image du modèle proposé par Vergnaud, les éléments de L sont langagiers ou non.
- $\sum$ est une structure de contrôle qui assure la non contradiction de la conception. Les contrôles sont des outils de décision sur la légitimité de l'usage d'un opérateur et sur l'état du problème (résolu ou non).

La perméabilité opérateurs-contrôles et la dialectique outil-objet. Il est parfois difficile de délimiter les opérateurs des contrôles : la distinction opérateurs-contrôles est toujours relative à une conception. Le travail conduit avec Modeste (2012) a permis de mettre en œuvre une modélisation via les μ-conceptions du concept « algorithme » (voir ci-après la nécessité de ces μ-conceptions comme « conceptions de référence »), de montrer la portée d'une telle modélisation, et de revenir sur cette perméabilité déjà soulignée par Mithalal (2010)[19] en instrumentant les conceptions avec la dialectique outil-objet (Douady, 1986) :

> En termes de conceptions, on peut considérer qu'il y a un glissement d'outil vers objet lorsque les structures de contrôles deviennent opérateurs. Le problème des observables et de la perméabilité opérateur-contrôle est moins gênant pour décrire des μ-conceptions, étant donné que l'on reste, à ce niveau, dans des considérations théoriques. (Modeste, 2012, p. 60)

Nous reprendrons ci-dessous la nécessité et l'apport des μ-conceptions.

Les sphères de pratiques. Pour la question de l'identification et de l'analyse du fonctionnement des conceptions, Balacheff (1995) introduit également les sphères de pratiques. Issues des travaux de Bourdieu, les sphères de pratiques délimitent le domaine de validité de la conception et sont ainsi décrites par l'ensemble des problèmes que la conception peut résoudre. Elles permettent d'adapter la formalisation des conceptions et donc les conceptions elles-mêmes, tout comme la définition d'une conception C plus générale que C'

[19] « (...) La perméabilité peut en fait s'interpréter de deux manières.
La première consiste en l'évolution du statut des objets considérés, qu'on pourrait rapprocher de leur existence sous forme d'outil ou d'objet (Douady, 1986). La perméabilité reflète alors une multiplicité des points de vue possibles de l'observateur, et nous retiendrons qu'un même objet de connaissance pourra donner lieu à différents opérateurs et contrôles.
La seconde interprétation est une imprécision terminologique ou méthodologique ne permettant pas de séparation claire. Un opérateur r est caractérisé par sa capacité à *transformer un problème* (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 6), c'est-à-dire à transformer un problème p_1 en un autre problème $p_2 = r(p_1)$. Un contrôle permet de porter un jugement sur l'action, et est en fait une « action sur l'action ». » (Mithalal, 2010, p. 106).

ou fausse au sens de C'. De telles définitions impliquent la question de la détermination de « conceptions de référence ».

Des conceptions de référence. On a vu la nécessité de considérer des conceptions « de référence » qui font autorité, impliquant les savoirs de référence. La conception Cμ est alors introduite comme plus générale que toutes les autres conceptions (son existence est un postulat) : Cμ est la conception de référence pour un μ-objet. Pourquoi μ ? L'univers de référence, noté μ, est l'ensemble des concepts mathématiques (proche du troisième monde de Popper pour les mathématiques). Pour chaque concept, une conception Cμ domine, et c'est celle-ci qui sera caractérisable et accessible lorsque nous chercherons à modéliser un savoir savant.

Si l'on réintroduit le sujet S dans ce modèle (S peut être un mathématicien, un étudiant, un enseignant en formation, un enseignant qui enseigne), on peut s'interroger sur ce que Balacheff (1995) appelle « son état de connaissance relativement à un concept μ à un moment donné ». Selon lui, on a accès à un **état de connaissance** en identifiant les conceptions. Finalement, on traduit une **instanciation d'un concept** dans une « institution » particulière (c'est le niveau des connaissances) par le biais des conceptions : ces conceptions sont en effet plus faciles à caractériser et on peut les plonger dans une perspective d'étude d'états de connaissance d'un sujet S, dans un cadre particulier qui sera, quant à lui, d'abord caractérisé par les problèmes sur lesquels le sujet S agit. On aura alors accès à une formalisation des interactions sujet/milieu via la description des opérateurs et contrôles. On pourra donc s'appuyer sur les μ-conceptions pour identifier les opérateurs et contrôles, et anticiper, analyser, et même gérer les actions de S, et ainsi délimiter la (ou les) conception(s) de S.

Un état de connaissance peut finalement être caractérisé schématiquement à partir d'un ensemble de conceptions d'un μ-objet et par l'ensemble des problèmes. Cet état de connaissance évolue notamment lorsque :

- le domaine de validité d'une conception est modifié ;
- des contradictions sont éliminées dans l'ensemble des conceptions ;
- et/ou lorsque l'ensemble des problèmes (ajout, suppression, restructuration de l'ensemble des problèmes) évolue (un cas particulièrement intéressant est lorsque l'on parvient à construire un problème qui permet de soulever la contradiction : la conception « erronée » évoluera alors suivant des conceptions intermédiaires – cas particulièrement complexe).

Balacheff (1995) distingue l'état de connaissance d'un sujet (qui sera diagnostiqué) et l'état de connaissance déterminé (objet d'enseignement). Il souligne que :

> (...) cette démarche offre un cadre pour conduire une analyse a priori au sens de la Didactique : la capacité d'énumérer les états de connaissances pour un objet mathématique donné (un μ-objet) donne accès à l'exploration de l'univers des possibles dans lequel un apprentissage aura lieu. (Balacheff, 1995, p. 19).

Conceptions et points de vue. Balacheff (1995) situe également le modèle des conceptions, et plus particulièrement les μ-conceptions (Cμ), relativement à la notion de point de vue (Castela, 1995, p. 10) :

> Il nous semble que Cμ correspond au "point de vue" au sens où Castella (1995, p. 10) propose de le formaliser à la suite de ses travaux sur les conceptions de la tangente : « Un point de vue est un découpage dans le corps des savoirs mathématiques sur un objet donné, rassemblant définitions, théorèmes, situations et signifiants ». On retrouve là les trois éléments P, R, et L. Quant à Σ, il reste implicite, donné en quelque sorte par la rationalité mathématique qui donne sa légitimité au point de vue. (Balacheff, 1995, p. 235).

En résumé : l'apport des μ-conceptions et notre utilisation du modèle. Nous retenons les définitions de trois niveaux (concept, connaissance, conception ; définitions illustrées ci-dessous, Figure 1) et surtout l'accessibilité, via les conceptions et plus particulièrement les μ-conceptions, à une formalisation de concepts mathématiques en considérant les instances :

- **Définition de connaissance** (K) : « un ensemble de conceptions ayant le même μ-objet » (Balacheff, 1995, p. 232). Cela permet de considérer le domaine de validité d'une connaissance et de prendre en compte son possible caractère contradictoire (une conception qui la constitue peut être fausse au sens d'une autre).
- **Définition de concept** (¢) : « l'ensemble des connaissances ayant le même μ-objet ». (Balacheff, 1995, p. 232)
- **Définition de conception** (C) : « Une conception est une instanciation de la connaissance d'un sujet par une situation (elle caractérise le couple sujet/milieu en situation), ou encore une instance d'un concept par un couple sujet/situation » (Balacheff, 1995, p. 233).

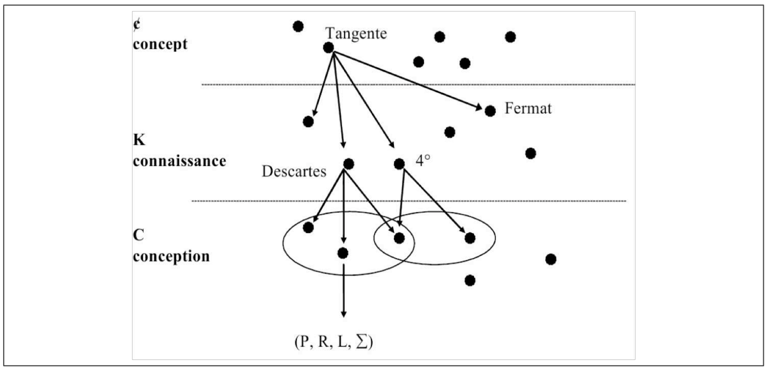


Figure 1 – Relations entre conception, connaissance, concept
(Balacheff & Margolinas, 2005, p. 23)

L'accessibilité d'un savoir de référence est donc avérée par la description de μ-conceptions comme instances d'un concept, en prenant en compte tout particulièrement le couple sujet/problèmes. La complexité de notre recherche a été d'accéder au concept de définition qui n'appartient pas à un savoir savant unique et explicite mais à une pratique de mathématicien relevant en grande partie de sa sphère privée. L'avantage de théoriser par les μ-conceptions réside dans le fait qu'il s'agit en fait d'instances d'un concept. Cet éclairage théorique nous a permis de focaliser également sur la définition des problèmes (dans le couple sujet/problèmes), jusqu'alors insatisfaisante, et de poursuivre les questionnements relatifs aux perturbations [Sujet <> Milieu].

Les conceptions décrites et utilisées dans Ouvrier-Buffet (2003, 2006 et 2011) n'avaient pas encore atteint le stade des μ-conceptions. Nous allons donc repartir de cette modélisation, l'affiner sous l'angle des μ-conceptions (en axant sur la caractérisation des problèmes) et évaluer sa portée didactique, en nous penchant à la fois sur la validation de ce modèle fortement épistémologique et sur son efficience didactique.

Soulignons qu'un autre intérêt du modèle cK¢ réside dans le fait que les opérateurs et contrôles se prêtent tout particulièrement à la caractérisation d'un processus tel celui de construction de définitions.

Enfin, le modèle cK¢ perd en quelque sorte la dimension « en-acte » présente chez Vergnaud (1991) : nous l'avons réintégrée avec le niveau des « définitions-en-acte »[20], nécessaire pour l'analyse de procédures d'étudiants (Ouvrier-Buffet, 2011). Nous y reviendrons.

[20] La nécessité d'introduire un autre niveau de définitions dans l'activité de définition, celui des

II-3.2. Composantes de notre modèle épistémologique

Les objectifs de la modélisation de conceptions par le modèle cK¢. Ces objectifs sont de différentes natures. Il s'agit d'utiliser ce modèle pour structurer l'exposé d'un nombre minimal de μ-conceptions, significatives relativement aux différents niveaux de préoccupations sur la définition (que ce soit des aspects relatifs à la dénomination, à la preuve, à la construction de théories etc.). L'explicitation des opérateurs et des contrôles de ces conceptions nous permettra de mettre en valeur les composantes importantes dans tout processus de construction de définitions, et d'apporter un cadre à visée didactique, en vu de l'analyse de procédures de différents sujets (étudiants, enseignants, mais aussi mathématiciens). Au regard de l'étude plus spécifique des μ-conceptions, nous reviendrons, après la présentation de la modélisation initiale, sur la question de la définition des problèmes. À ce propos, rappelons que l'une des difficultés reconnues du modèle cK¢ est la définition de l'ensemble des problèmes caractérisant une conception. Nous pouvons aussi remarquer qu'il est tout aussi difficile d'accéder à une situation fondamentale. En ce qui concerne les concepts, ce que développe Vergnaud est également sujet au même genre de difficulté.

Pourquoi Aristote, Popper, et Lakatos ? L'étude de ces trois conceptions apporte effectivement une complémentarité sur le concept de définition : la conception aristotélicienne développe des composantes logiques et langagières (étude du discours), celle de Popper propose une théorie de la théorie (étude théorique), et la conception lakatosienne s'intéresse à la construction de définitions parallèlement à la construction de concepts (étude heuristique). Il s'agit, par la caractérisation de la conception de Lakatos en particulier de systématiser le processus de construction de définitions présenté sur l'exemple des polyèdres. Parallèlement, il est nécessaire d'appréhender une partie de la culture de Lakatos par l'étude de certains auteurs auxquels il fait référence tels Popper et Aristote : la boucle est bouclée.

Revenons rapidement sur le choix de Popper : celui-ci se place davantage dans une approche axiomatique, étudiant la construction de théorie (c'est aussi le cas chez Leibniz et Frege). Il s'intéresse à deux problèmes distincts : la recherche de (la) vérité et une réponse à la question « Comment traduire le progrès scientifique ? » d'une part, et l'élaboration d'une théorie (point de vue axiomatique) d'autre part. Le traitement poppérien au premier problème l'amène à la critique de la présentation aristotélicienne des définitions et de l'aspect encyclopédique qu'elle induit. Le second amène Popper à préciser le rôle des définitions dans une axiomatique. Dans l'étude qui nous intéresse, nous avons analysé la critique poppérienne et appellerons conception poppérienne le traitement du problème des théories scientifiques selon Popper.

Soulignons que la modélisation de conceptions sous l'angle théorique de cK¢ annonce nécessairement une relecture des auteurs considérés. Nous présenterons les conceptions aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne dans cet ordre.

II-3.3. Trois conceptions pour modéliser l'activité de définition

Cette modélisation épistémologique de l'activité de définition (initialement présentée dans Ouvrier-Buffet, 2003 ; redéveloppée dans Ouvrier-Buffet, 2006 & 2011 ; et ici avec des enrichissements) s'appuie sur trois conceptions représentatives de ce processus : celles

---

définitions-en-acte, est illustrée dans Ouvrier-Buffet (2011) dans une situation impliquant des concepts non familiers des étudiants. Une définition-en-acte est définie de la façon suivante : il s'agit d'un énoncé utilisé comme un outil (et non comme objet) permettant aux étudiants d'être opérationnels dans l'avancée d'un problème, sans avoir recours à une définition explicite. Ce niveau de définition vient avant celui des zéro-définitions et pourra même peser contre une zéro-définition. De la même façon que les définitions dépendent des propositions, les définitions-en-acte sont en lien avec des propositions-en-acte.

d'Aristote, Lakatos et Popper. Nous renvoyons à Ouvrier-Buffet (2003a, 2007) pour plus de détails concernant la description de ces trois conceptions et leurs intrications avec les courants philosophiques du nominalisme et de l'essentialisme. **Nous considérons la modélisation par les conceptions présentée ci-dessous comme initiale et nous allons travailler à son enrichissement et à sa finalisation dans ce document.** Cette modélisation a pour double objectif d'intégrer la dimension épistémologique mais aussi la dimension cognitive de l'activité de définition, et de proposer un modèle productif au niveau didactique (c'est-à-dire permettant de concevoir des situations de construction de concepts, de situer le processus de définition au sein de la démarche mathématique, d'anticiper les processus possibles, de gérer de telles situations, de transférer à des enseignants, d'essayer d'impacter sur les curricula).

Nous avons retenu le modèle de conception de Balacheff (§ II-3.1). Rappelons brièvement que deux niveaux d'invariants interviennent : les opérateurs (R) qui permettent d'agir sur la situation et les structures de contrôles (Σ) qui justifient et valident l'utilisation des opérateurs. Rappelons également qu'une conception est décrite par un quadruplet (P, R, L, Σ) où :

- P est un ensemble de problèmes sur lesquels la conception est opératoire,
- R est un ensemble d'opérateurs,
- L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R,
- Σ est une structure de contrôle qui assure la non contradiction de la conception.

Suivant ce quadruplet, les trois conceptions retenues, qui se situent en fait au niveau des μ-conceptions, se déclinent de la façon qui suit (dans un but d'exhaustivité et de synthèse, nous présenterons les conceptions sous la forme de tableaux). Nous décrivons en particulier différents « pôles » dans les structures de contrôle qui traduisent des orientations des contrôles.

Conception aristotélicienne

Aristote présente essentiellement le processus dit de définition par *genre et différences spécifiques*. Nous la retenons pour les dimensions logique et langagière qu'elle renferme, mais aussi pour la problématique de « résistance aux contradicteurs » que propose Aristote dans sa présentation des définitions (*Les Topiques*).

La caractérisation de cette conception a été réalisée à partir des textes d'Aristote (*Les Topiques* et *Les Seconds analytiques*).

Concernant la question de l'existence, Aristote considère qu'elle n'a pas à être prise en charge dans la définition, mais que la question se posera :

> La définition ne prouve pas que la chose définie existe, puisque, même s'il y a quelque chose qui soit équidistant d'un centre, cependant pourquoi la chose définie existerait-elle ? (…) Les définitions ne vont pas jusqu'à démontrer que la chose définie puisse exister, ni qu'elle est ce qu'on prétend définir : il est toujours possible de demander le pourquoi. (Aristote, *Seconds Analytiques* II.7, p. 185).

Poincaré, quant à lui, précise que la définition comprend un axiome qui affirme l'existence de l'objet. Il s'agit en fait d'éviter des contradictions en s'assurant de l'existence. Nous avons ainsi intégré la question de l'existence de l'objet défini à la conception aristotélicienne au niveau des contrôles.

Problèmes (P)	**Opérateurs (R)**	**Contrôles (∑)**	**Systèmes de représentation (L)**
Classification (l'exemple de la géométrie est donné), et plus généralement : tout problème où une délimitation (au sein d'un même *genre* par exemple) est possible.	$\mathbf{R}_1^{\mathbf{A}}$: procéder par *genre et différences spécifiques* (rechercher les invariants au sein d'une classe). $\mathbf{R}_2^{\mathbf{A}}$: supprimer toute redondance. $\mathbf{R}_3^{\mathbf{A}}$: supprimer toute régression à l'infini. $\mathbf{R}_4^{\mathbf{A}}$: prouver l'équivalence entre définitions. $\mathbf{R}_5^{\mathbf{A}}$: formuler une définition esthétique (simple quant au langage)	- **Pôle « Logique »** : proscrire les cercles vicieux, les termes antérieurs doivent être définis. Une définition est une condition nécessaire et suffisante. L'unicité du concept défini doit être vérifiée. - **Pôle « Langage et logique »** : proscrire les redondances et régressions à l'infini (d'où l'existence de termes primitifs) ; pas de métaphores ni homonymes. - **Pôle « Essentialisme »** : interroger l'existence des concepts définis.	- Langage et règles du discours - Logique - NB : l'importance de la représentation des concepts (et donc des systèmes de représentation propres à chaque concept) n'est pas présente chez Aristote mais découle de la conception aristotélicienne.

Tableau 1 – Conception aristotélicienne

Conception poppérienne

Popper se distingue par son rejet de l'essentialisme aristotélicien. Il s'inscrit dans le courant du nominalisme méthodologique qui « entreprend de décrire comment la chose se comporte selon les circonstances, et plus particulièrement, de déterminer si ce comportement obéit à des règles constantes. » (Popper, 1962, p. 34).

Les définitions ne sont pas centrales dans sa problématique, mais sa recherche d'une méthodologie scientifique est complémentaire à ce que l'on trouve dans P&R de Lakatos :

> Naturellement lorsqu'une définition aide à résoudre un véritable problème, la situation est différente, et il est vrai que certains problèmes ne peuvent être résolus qu'au prix d'un effort de précision. (Popper, 1990, p. 277).

L'apport principal de Popper pour la description des conceptions réside dans les structures de contrôles.

Problèmes (P) : choix entre théories concurrentes **Système de représentation (L) :** relatif aux théories et concepts en jeu	
Opérateurs (R)	**Contrôles (∑)**
$\mathbf{R}_1^{\mathbf{P}}$: génération de contre-exemples (processus de réfutations). $\mathbf{R}_2^{\mathbf{P}}$: ne rien dériver d'une définition car une définition est un raccourci de langage. $\mathbf{R}_3^{\mathbf{P}}$: réduire le nombre de postulats et voir si la théorie explique davantage de choses au	- **Pôle « heuristique »** : Résistance aux réfutations - **Pôle « théorique »** : « Une théorie t_2 dépasse une théorie t_1 lorsque : 1) t_2 formule des assertions plus précises que ne le fait t_1, et celles-ci résistent à des tests plus précis. 2) t_2 prend en compte et explique davantage de faits que t_1. 3) t_2 décrit ou explique les faits de manière plus détaillée que t_1. 4) t_2 a subi avec succès des tests où t_1 avait échoué. 5) t_2 a permis de nouveaux tests expérimentaux qui n'avaient pas été envisagés avant que cette théorie n'ait été conçue, et a subi ces tests avec succès. 6) t_2 a permis d'unifier ou de relier divers problèmes qui étaient jusque-là sans rapport. » (Popper, 1985, p. 344) - **Pôle « méta »** : Contrôle appelé « savoir métascientifique » par

regard de telle ou telle définition.	Popper : « Celui-ci est visiblement de nature intuitive, et prétend que nous savons ce que doit être une bonne théorie scientifique, avant même qu'on ait procédé à des tests. » (Popper, 1985, p. 322).

Tableau 2 – Conception poppérienne

Conception lakatosienne

La conception lakatosienne, telle qu'elle est dans P&R, inclut les conceptions aristotélicienne et poppérienne, mais se concentre sur le processus de génération de concepts en laissant une place privilégiée aux définitions : c'est ce processus qui est décrit dans la conception présentée dans le tableau suivant.

Problèmes (P)	**Opérateurs (R)**	**Contrôles (∑)**	**Système de représentations (L)**
- Problèmes intramathématiques : recherche du domaine de validité d'une conjecture, détermination de la validité d'une preuve (heuristique). - Classification (classer les polyèdres à l'image de la classification des polygones). ... Mais une recherche scientifique « commence et finit par des problèmes » (Lakatos, 1984, p. 133)	$\mathbf{R_1^L}$: génération d'exemples et contre-exemples (conséquences sur la définition produite : re-formulation, exclusion ou inclusion du contre-exemple). La difficulté réside dans la séparation entre les exceptions et le domaine des exemples. $\mathbf{R_2^L}$: rédiger une zéro-définition. $\mathbf{R_3^L}$: utiliser une définition dans une preuve (mise à l'épreuve de la définition, retour sur la nature des contre-exemples). $\mathbf{R_4^L}$: changer de cadre (cet opérateur est en germe dans les textes de Lakatos). $\mathbf{R_5^L}$: formuler un nouveau problème.	- **Pôle « preuve »** : notion de *proof-generated definitions* (contrôles issus de la dialectique preuve-définition), liée à un changement de cadre ou non (il peut s'agir d'une validation de la zéro-définition, mais aussi de l'émergence d'un concept via un lemme caché). - **Pôle « philosophique et logique »** : voir la conception aristotélicienne. - **Pôle « axiomatique »** : voir la conception poppérienne car le niveau axiomatique est en dehors du cadre explicite de Lakatos. - **Pôle « structurel »** : contrôles relatifs à un changement de cadre (insuffisament explicité et étudié chez Lakatos, mais découlant de $\mathbf{R_4^L}$) - **NB** : il n'y a **pas de critère de fin** explicite du processus de P&R, donc pas de contrôle de fin.	- Représentations du (ou des) concept(s) mathématique(s) en jeu - Systèmes de représentation interne aux mathématiques - Systèmes de représentations en jeu lors d'un changement de cadre

Tableau 3 – Conception lakatosienne

Nous allons revenir sur le couple sujet/problèmes de ces μ-conceptions en interrogeant notamment la spécificité des problèmes de chacune de ces trois conceptions. En effet, les types de situations Classification, Résolution de problèmes, Mathématisation/Modélisation proposées dans Ouvrier-Buffet (2003a) demeurent peu explicites.

II-3.4. Utilisation de ces conceptions pour analyser des situations impliquant une activité de définition

Il s'agit ici principalement des résultats apportés par nos travaux (Ouvrier-Buffet, 2003a ; 2003b ; 2006 ; 2011). Les conceptions ont révélé une opérationnalité didactique, à deux niveaux :

- la conception et l'analyse *a priori* de situations impliquant la construction de définitions ;
- la gestion de telles situations par l'identification des processus de définition des étudiants, et la possibilité de proposer des rétroactions en utilisant des opérateurs ou contrôles lors de blocages. Il a également été possible de proposer de nouveaux problèmes aux étudiants afin de les engager dans un processus de validation de leurs zéro-définitions ; ces problèmes ont été élaborés à partir de problèmes générés lors de la recherche des étudiants.

Nos expérimentations ont porté principalement sur l'étude de concepts discrets et problèmes issus des mathématiques discrètes, au niveau du supérieur (première année d'université), donc hors curricula. Nous avons bénéficié de faibles effectifs (une dizaine ou une vingtaine d'étudiants travaillant en groupes). L'une des caractéristiques principales de ces concepts et problèmes concerne leur accessibilité par leurs représentations et leur exploration. Par ailleurs, certains des concepts que nous avons utilisés sont encore en construction dans la recherche mathématique (objets géométriques discrets, problème de Frobenius), ce qui permet de créer des conditions où étudiants et gestionnaire de la situation disposent d'un même bagage conceptuel face à une situation impliquant un « nouveau » concept.

Ces expérimentations ont par ailleurs permis de mettre en évidence la nécessité de considérer les « définitions-en-acte », niveau écarté de fait par la modélisation via les conceptions de Balacheff (1995, 2003). Nous avons ainsi pu définir, pour compléter les analyses *a priori* et *a posteriori* et les différents types de définitions, les définitions-en-acte de la façon suivante : il s'agit d'un énoncé utilisé comme un outil (et non comme objet) permettant aux étudiants d'être opérationnels dans l'avancée d'un problème, sans avoir recours à une définition explicite. Ce niveau de définition vient avant celui des zéro-définitions et pourra même peser contre une zéro-définition. De la même façon que les définitions dépendent des propositions, les définitions-en-acte sont en lien avec des propositions-en-acte.

Les types de situations utilisées dans nos expérimentations étaient principalement des situations de classification, la preuve étant un lieu de validation des définitions construites (il n'était pas question de viser l'émergence d'un lemme caché à la Lakatos). Nous avons également investi de manière exploratoire les niveaux primaire et secondaire en travaillant sur une situation de classification sur la convexité (en primaire) et sur le concept d'arbre (dans le secondaire), avec les mêmes types de résultats qu'au niveau supérieur quant à l'efficience des outils didactiques que nous avons élaborés, à l'implication des élèves dans l'activité et à leur capacité à prendre la responsabilité de rédiger des définitions (Ouvrier-Buffet, 2005).

II-3.5. Ouverture sur une situation fondamentale pour la construction de définitions

Nous avons proposé (Ouvrier-Buffet, 2003a), en vue de considérer une situation fondamentale pour la construction de définitions, un ensemble de trois situations (Classification, Résolution de problèmes, Mathématisation/Modélisation) dont les caractéristiques sont les suivantes :

- chaque concept retenu peut être problématisé dans une situation de Classification, de Modélisation ou de Résolution de problèmes (à la Lakatos) ; il s'agissait de concepts discrets (arbre, droite discrète, déplacements sur une grille et concepts de générateur et de minimalité) ;
- la construction de définitions joue le rôle de *réponse adaptative optimum* (au sens de Brousseau) ;
- une situation de Classification (facilement dévoluable) permet une « première rencontre » avec l'activité de définition (définir ne correspond en effet pas au rôle usuel de l'étudiant dans une institution « enseignement ») ;
- les situations de Mathématisation/Modélisation et Résolution de problèmes permettent la mise en œuvre d'une activité de définition impliquant un niveau de définitions-en-acte et de zéro-définitions (la dévolution de l'activité de définition est ici en partie à la charge du gestionnaire de la situation).

Par rapport à cet ensemble de situations, il reste à effectuer un retour expérimental quant à l'aspect « fondamental » dans le but d'expliciter les variables de celui-ci en question. Rappelons que les variables d'une situation fondamentale changent le statut cognitif de la connaissance visée, en tant que moyen de contrôle de l'action, moyen de communication, moyen de preuve, algorithme de référence etc. (Brousseau, 1982, p. 198).

II-3.6. Vers un enrichissement de notre modèle épistémologique des trois conceptions lakatosienne, aristotélicienne, et poppérienne

L'enrichissement du modèle épistémologique présenté ci-dessus va se faire essentiellement du côté des problèmes. Comme nous l'avons annoncé, nous allons revenir sur la question des μ-conceptions afin de caractériser davantage le savoir de référence. La question des problèmes et du couple sujet/problèmes est alors fondamentale. Nous privilégierons la caractérisation des problèmes et utiliserons un outil de modélisation des problèmes afin de systématiser celle-ci (voir § III-1). Pour l'instant, nous avons trois conceptions avec les couples sujet/problèmes suivants : Aristote / Classification ; Popper / Mathématisation-Formalisation, Lakatos / Résolution de Problèmes (Ouvrier-Buffet, 2003a). Nous pouvons également enrichir chacune des trois conceptions par des éléments issus de la littérature sur l'activité de définition, par exemple : la modélisation de la conception lakatosienne peut encore être précisée davantage par les différents traitements des « monstres » notamment et leurs impacts sur les définitions en construction.

Mais ceci demeure encore insuffisant pour un usage didactique plein et entier, pour deux raisons principales :

- cela ne fait pas état des types de problèmes effectifs que pourrait mettre en œuvre un enseignant et que pourrait traiter un élève ou étudiant – et là, nous pouvons aussi interroger les types de problèmes des mathématiciens ;
- et cela ne montre pas suffisamment comment un processus de définition peut effectivement être balisé, avec une certaine simultanéité, par les opérateurs et contrôles de ces trois conceptions – cela pose *in fine* la question de la transmission de ce genre de

processus dans le cadre d'une pratique d'une activité mathématique. En fait, nous pouvons considérer, pour l'instant, que ces trois conceptions peuvent intervenir dans l'ordre chronologique suivant : Lakatos, Aristote, Popper, avec des cycles possibles (à l'image du processus de P&R).

Nous allons également interroger la validité de ce modèle via différentes mises à l'épreuve en didactique des mathématiques et des entretiens avec des mathématiciens, qui nous permettront d'accéder à un niveau de validation mais aussi à un enrichissement du modèle.

II-4. Différentes utilisations de Lakatos – Apports et nouvelles questions

Nous allons reprendre ici les différents travaux didactiques utilisant le modèle de Lakatos, en identifier les apports au regard de notre modélisation des conceptions, mais aussi faire émerger de nouvelles questions de recherche. Le scénario de Lakatos a été pris comme un modèle pour la classe alors qu'initialement, la présentation dialoguée de P&R avait pour but de représenter différents courants mathématiques et philosophiques pour un problème dont la résolution a pris plusieurs années. Il est évident que les interactions maître-élèves jouent un rôle fondamental et sont à analyser. Nous allons présenter tout d'abord ce qui relève d'une utilisation naturaliste du cadre de Lakatos pour souligner cet aspect. Nous reviendrons ensuite sur les travaux mobilisant Lakatos avec d'autres cadres théoriques. Nous interrogerons enfin l'utilisation de diagrammes pour représenter et transmettre un processus de P&R.

II-4.1. Des utilisations « naturalistes » : la question problématique de la gestion de situations « à la Lakatos »

Nous entendons par « naturalistes » dans le sens « qui imite ». De nombreux chercheurs s'accordent à souligner l'influence de Lakatos en didactique des mathématiques (Davis & Hersch, 1981 ; Hersch, 2006 ; Sriraman, 2008 etc.), mais peu se sont emparés de la question de la reproductibilité de situations « à la Lakatos » et des conditions expérimentales nécessaires.

La faisabilité d'une implémentation d'une situation « à la Lakatos ». Balacheff (1987) a tenté de proposer une situation « à la Lakatos », non pas en concevant une situation initiale telle celle de Lakatos, mais en observant comment la question de la nature des objets en jeu est posée lors d'une réfutation par un contre-exemple[21]. L'activité de définition ne peut émerger que si les étudiants posent la question de savoir ce qu'est un polygone, une diagonale, deux concepts qui leur sont familiers. C'est là que « le problème de la définition a ensuite joué un rôle essentiel à la fois dans la résolution du problème et dans leur démarche de validation » (Balacheff, 1987, p. 188). Les définitions apparaissent alors comme des bases communes pour la résolution du problème et représentent une forme d'institutionnalisation des connaissances en jeu. De son expérimentation, Balacheff (1987) conclut que le fait de fournir une information de référence (définition essentiellement précisant les objets en jeu) « ne modifie pas sensiblement (dans le cadre de [son] expérience) les processus de preuve. » (Balacheff, 1987, p. 192). Ainsi, le travail sur la définition est possible : ici il était opportun et s'est inscrit dans une logique locale de réfutations, les étudiants (des élèves de 4ème) cherchant à sauver leur conjecture en ne retenant que les objets pour lesquels elle était valide.

Des conditions expérimentales très particulières. Borasi (1992), Yim, Song, & Kim (2008) impliquent les étudiants dans une activité mathématique où émerge une activité de définition (principalement en géométrie, dans la même situation que Lakatos ou dans des situations de

[21] Le problème proposé était de nature combinatoire : « Déterminer un moyen pour calculer le nombre de diagonales connaissant le nombre de sommets d'un polygone ».

reconstruction de concepts en géométrie et *Taxicabgeometry*[22]). Les conditions expérimentales sont très particulières (très faible effectif et/ou élèves surdoués ; gestion de la situation par le chercheur), et les auteurs retracent certains éléments des procédures des élèves avec le processus de P&R de Lakatos. Lampert (1990) propose aussi une utilisation naturaliste de Lakatos, et insiste surtout sur la gestion que doit opérer l'enseignant lorsque l'activité va se porter sur les définitions et l'instrumentation d'exemples et contre-exemples.

Dans ces différents travaux, certaines composantes de la méthode lakatosienne sont reprises : il s'agit principalement de l'utilisation des contre-exemples, et beaucoup plus rarement de la notion de *proof-generated definition*.

Interroger la portée des travaux de Lakatos du côté des pratiques des enseignants. Sriraman (2008) pose la question de la portée des travaux de Lakatos en didactique des mathématiques du côté de la recherche, mais aussi du côté des pratiques en argumentant sur la nécessité de prendre comme point d'appui pour le développement de théories de l'apprentissage le travail de Lakatos. L'importance de la gestion par l'enseignant, devant aussi être au fait des développements historiques (nous dirions même épistémologiques) des concepts, est également rappelée. Sriraman a expérimenté des situations « à la Lakatos » (au lycée, Sriraman, 2003 ; en formation d'enseignants du premier degré, Sriraman & Daniels (non publié)) et en a discuté, et même « idéalisé » (SIC, Sriraman, 2008) les potentialités pédagogiques (voir aussi Sriraman, 2006). Il émet l'hypothèse que la « mathématisation »[23], telle qu'elle est proposée par Lakatos et exemplifiée par Fawcett (1938)[24], est possible dans l'enseignement secondaire. Implicitement, le statut des énoncés et « exemples » proposés par les étudiants est lui aussi crucial (cet aspect n'est pas développé par Sriraman) : si les étudiants n'en perçoivent ni le statut ni la portée, ce sera à l'enseignant d'orienter la recherche. Nous reprendrons les diagrammes proposés par Sriraman (2006) qui permettent de retracer, *a posteriori*, une méthode de P&R (voir § II-4.3). Soulignons dès maintenant que les problèmes retenus pour les expérimentations de Sriraman sont de nature combinatoire et sont censés permettre aux enseignants de se détacher des méthodes et contenus habituels (Sriraman, 2006).

Décrire les interventions de l'enseignant. Koichu (2012), dans une situation très épistémologique de définition du triangle de Penrose et de preuve de son impossibilité (relativement aux axiomes de la géométrie euclidienne), insiste sur le rôle de l'enseignant qu'il décrit suivant les termes de Brousseau et Gibel (2005). Les trois types d'intervention proposés par Brousseau & Gibel (2005, p. 20), lorsque le problème en jeu est ouvert pour les étudiants mais pas pour l'enseignant, sont les suivants :

1) Mettre en jeu les connaissances pertinentes que les élèves ont déjà apprises.
2) Mettre en évidence les informations données dans le texte du problème.
3) Faire référence à des conditions qui ne font pas partie des connaissances supposées des élèves et qui ne peuvent pas être logiquement déduites du texte du problème.

Les interventions de type 3 peuvent rendre l'autonomie des élèves dans la recherche du problème impossible. Pour éviter cela, Koichu (2012) propose de passer par l'introduction de problèmes auxiliaires en interventions de type 3, pour permettre aux étudiants d'accéder à un

[22] Il s'agit de définir des objets et propriétés géométriques connus (droite, carré, parallélisme etc.) dans le cadre d'une géométrie sur une grille discrète régulière. La notion de « plus court chemin » est par exemple appréhendée en considérant les déplacements d'une voiture de taxi dans une ville américaine (d'où le nom).

[23] À comprendre dans le sens de générer une structure, voire même une structure sur une structure lorsque la structure initiale génère de nouveaux problèmes et de nouvelles situations à explorer.

[24] Fawcett (1938) a reconstruit, avec des élèves, une géométrie, mettant en place des discussions relatives aux choix de définitions et d'axiomes, sur une période d'apprentissage de deux ans.

niveau axiomatique et ultérieurement faire émerger une *proof-generated definition*. En fait, c'est l'enseignant (et ici, dans l'expérimentation relatée, le chercheur) qui légitime l'activité de définition en la sollicitant (sinon, les étudiants pourraient attendre qu'elle provienne d'un manuel ou d'un ouvrage). Les interventions de type 3 doivent permettre d'accéder à un niveau pré-axiomatique, notamment par l'introduction de problèmes auxiliaires par le gestionnaire de la situation.

La situation de définition est caractérisée par Koichu (2012) de la façon suivante : il s'agit de la donnée d'un objet ostensif, dont l'existence pose question, d'où la nécessité d'une considération de la théorie axiomatique. Ce niveau permet l'observation de *proof-generated definition*, avec des interventions spécifiques de l'enseignant.

Nous allons revenir sur les interventions de l'enseignant avec une représentation de la gestion d'une situation « à la Lakatos » (Sriraman, 2006) dans le paragraphe ci-dessous.

II-4.2. Utilisations croisées avec d'autres cadres

II-4.2.1. La guided reinvention

Larsen & Zandieh (2005, 2008) ont centré leurs travaux dans une perspective de preuves et réfutations, plaçant l'activité de conjecture et de preuve au sein de l'activité de définition. Leurs expérimentations impliquent des concepts de géométrie et d'algèbre à l'université. Ils concluent que le rôle de la preuve dans l'activité de définition consiste à :

> 1) dire quel rôle la définition doit jouer ; 2) suggérer l'aspect que la définition doit avoir afin de pouvoir jouer ce rôle ; et 3) permettre de déterminer si la définition tient effectivement le rôle qu'elle est censée avoir. » (traduit par nos soins). (Larsen & Zandieh, 2005).

Dans leur réflexion, la preuve est présentée simultanément comme une motivation pour l'activité de définition, mais aussi comme un guide et une façon de légitimer la définition. On retrouve ici partiellement la vision classique du rôle des définitions dans la structuration de la preuve, pour régler des inférences logiques. L'apport du travail de Larsen & Zandieh réside dans leur analyse de processus de *reinvention* croisée avec les outils proposés par Lakatos. Ils montrent en effet la pertinence de ces outils, dans des situations appropriées, c'est-à-dire suivant les critères des situations de Lakatos, y compris dans la gestion par l'enseignant. Cela étant, les concepts en jeu sont déjà connus des étudiants et il s'agit d'une reconstruction de définitions, mais, comme nous l'avons déjà souligné, les « élèves » de Lakatos sont en fait dans une situation similaire. Larsen & Zandieh (2005, 2008) proposent ainsi des situations « à la Lakatos » avec une conjecture de départ et une preuve données : tout dépend de cette situation initiale. Le rôle des contre-exemples est central : l'émergence d'un contre-exemple global et l'analyse de la preuve sont là pour avancer dans l'étude de la conjecture et de *proof-generated concepts*, mais le niveau *proof-generated* est rarement atteint. Les concepts retenus par Larsen & Zandieh se prêtent à ce schéma : ils reprennent en effet les notions de convergence uniforme et de séries de fonctions (comme Lakatos) et choisissent également le cadre de la théorie des groupes afin de calquer le modèle de situation de Lakatos. À cet effet, le questionnement consiste à rechercher le plus petit nombre de conditions suffisantes pour qu'un sous-ensemble d'un groupe soit un sous-groupe, les définitions de groupe et de sous-groupe étant données. Si le travail attendu des étudiants réside dans la production de conjectures et de contre-exemples, il n'en demeure pas moins que le rôle de l'enseignant dans la gestion reste majeur (en particulier, il fournira les contre-exemples). La production finale est un théorème[25] (et non pas une définition ou une

[25] "Non empty finite closed subset of a subgroup is a subgroup." (Larsen & Zandieh, 2005).

proof-generated definition) issu du travail sur la preuve fournie. En définitive, “the typical outcome of monster-barring activity is a modification or clarification of a definition” (Larsen & Zandieh, 2008, p. 208) : pour ces auteurs, l’activité de définition intervient essentiellement au niveau de la relégation des monstres (au sens de Lakatos) dans une dialectique entre contre-exemple et définition. La prise en compte des exceptions impacte sur la conjecture et l’analyse de la preuve également, sans forcément aboutir à des *proof-generated concepts*.

Dans le prolongement des travaux de Larsen & Zandieh (2005, 2008), un cadre théorique a été affiné par Zandieh & Rasmussen (2010) : celui de la DMA (*Defining as a Mathematical Activity*) qui s’appuie sur la RME (*Realistic Mathematics Education*) et les notions de *concept image* / *concept definition*. Ce sera développé plus en détail ci-après (§ II-6.2.).

II-4.2.2. La caractérisation de différents types de conjectures et la mise en relation avec la production de preuves (Reid (2002) et Boero (1999))

Nous n’avons pas encore abordé les différents types de conjectures possibles et l’activité mathématique que cela implique. Étant donné la place des conjectures dans le processus de P&R, il nous semble nécessaire de faire un point à ce sujet, en particulier pour enrichir la définition des problèmes impliquant une activité de définition que nous conduirons ultérieurement, mais aussi la description même de la conception lakatosienne.

Reid (2002), dans un travail de caractérisation de différents types de conjectures, et soulignant le manque de travaux à ce sujet[26], a mis en évidence trois modes de raisonnement qui sont repris et complétés dans Cañadas et *al*. (2007). Lors de l’expérimentation proposée (un problème de combinatoire[27]), des processus de type *monster-barring* et *exception-barring* « à la Lakatos » sont observés. Boero (1999) propose également ce genre de typologie. Nous retiendrons de ces travaux les caractérisations des conjectures et processus afférents afin d’enrichir la typologie de problèmes de construction de définitions et la description d’un opérateur lakatosien en particulier (celui concernant la formulation de nouveaux problèmes).

Rappelons la typologie de Reid (2002) et Cañadas et *al*. (2007), ainsi que celle de Boero (1999) qui va au-delà des conjectures et nous permet d’envisager la dialectique avec la preuve de manière plus forte.

- **Type 1 : induction empirique à partir d’un nombre fini de cas discrets**
    - Reid (2001) propose les stades suivants pour ce type d’élaboration de conjecture :
        - Étudier un modèle (*pattern*) récurrent
        - Conjecturer (et douter) que ce modèle peut être généralisé
        - Tester la conjecture (prédire et vérifier)
        - Généraliser la conjecture (être certain de sa généralité).
    - Cañadas et *al*. (2007) enrichissent les propositions de Reid (2001) :
        - Explorer différents cas
        - Organiser ces cas (remarque : nous retrouverons cet aspect de catégorisation, qui nous semble particulièrement important dans un processus de définition, dans les entretiens avec les mathématiciens)
        - Rechercher des modèles récurrents
        - Formuler une conjecture
        - Valider la conjecture
        - Généraliser la conjecture
        - Justifier sa généralisation.

[26] “More work needs to be done on the relationship between problem contexts and types of conjecturing. The examples we have offered here are intended as models for such work.” (Cañadas et *al*., 2007, p. 67).

[27] Trouver tous les carrés dans une grille de 4 par 4, puis 5 par 5 (les élèves étendent le problème ensuite à des grilles plus grandes)

- **Type 2 : induction empirique à partir de cas dynamiques**
  - Manipuler et ainsi explorer une situation grâce à une manipulation dynamique dans un environnement approprié permettant la manipulation de cas continus
  - Étudier une propriété (c'est-à-dire un invariant) dans la situation
  - Formuler une conjecture que la propriété est vraie pour d'autres cas
  - Valider la conjecture
  - Généraliser la conjecture
  - Justifier sa généralisation.
- **Type 3 : analogie** (remarque : ce type est également très important dans la pratique des mathématiciens, comme nous le verrons plus loin).
  - Étudier deux cas
  - Rechercher les similarités
  - Formuler une conjecture basée sur cette similarité
  - Valider la conjecture
  - Généraliser la conjecture
  - Justifier sa généralisation.
- **Type 4 : abduction** (au sens de Pierce, c'est-à-dire énoncer une règle générale à partir d'un seul cas, que ce soit un exemple ou un événement)
  - Étudier un cas
  - Sur cette étude, noter un élément surprenant ou significatif
  - Formuler une conjecture basée sur le fait que cet élément significatif s'applique à d'autres cas
  - Valider la conjecture
  - Généraliser la conjecture
  - Justifier sa généralisation.
- **Type 5 : conjecturer à partir d'un élément perceptif** (à partir d'une représentation, d'une image mentale, d'une expérience perceptuelle)
  - Convertir le problème en une représentation perceptuelle
  - Construire une représentation mentale personnelle des éléments mathématiques impliqués
  - Étudier perceptivement les caractéristiques de la représentation
  - Formuler une conjecture basée sur les caractéristiques de la représentation
  - Justifier ou formaliser la conjecture
  - Généraliser la conjecture
  - Justifier sa généralisation.

Malgré cette présentation descriptive très détaillée, les auteurs soulignent que davantage de recherches doivent être conduites sur les interactions entre les contextes des problèmes et les manières de conjecturer (Cañadas et *al.*, 2007, p. 67). Nous reprendrons ces éléments dans la modélisation finale.

Boero (1999) décrit quant à lui six phases pour les activités de production de conjectures et construction de preuve, ces phases devant être considérées comme en interrelation. Ces phases ne constituent pas une présentation linéaire du travail du mathématicien mais s'en inspirent. Nous les rappelons ci-dessous.

- Phase 1 : **production d'une conjecture** (cela comprend : exploration du problème, identification de « régularités », identification de conditions favorables à ces régularités, identification d'arguments plausibles en faveur de la conjecture etc.). Boero (1999) souligne que cette phase appartient à la sphère privée du mathématicien.
- Phase 2 : **formulation d'un énoncé** respectant des conventions textuelles partagées (cette phase peut conduire à la publication d'un texte).
- Phase 3 : **exploration et étude du domaine de validité de la conjecture** (cela

comprend : l'élaboration de liens entre hypothèses et thèse, de nature heuristique et sémantique ; l'indentification d'arguments pertinents pour la validation, relativement à la théorie de référence ; l'étude de nouvelles interrelations). Là encore, Boero (1999) note que cette phase appartient à la sphère privée du mathématicien, et c'est un lieu que nous explorons particulièrement dans notre recherche.

- Phase 4 : **construction d'une séquence déductive** intégrant un enchaînement d'arguments théoriques cohérents, sous l'éclairage d'un travail comprenant des analogies, des études de cas etc. Boero (1999), dans la lignée de Thurston (1994), précise que cette phase est fréquemment reprise lorsque les mathématiciens ont présenté leur travail à des collègues de manière informelle ou de manière plus formelle lors de séminaires.
- Phase 5 : intégration des arguments dans la **construction d'une preuve** relevant de standards mathématiques, qui ne sont pas absolus mais dépendent en fait de la période et du lieu de publication, que ce soit une revue, un livre, un manuel du secondaire ou un ouvrage pour l'université. Cela conduit à la production d'un texte pour publication. Cette phase peut impliquer un retour aux phases 1 et 2.
- Phase 6 : **vers la preuve formelle**. Thurston (1994) affirme qu'il est pratiquement impossible (et presque vide de sens) de produire une preuve formelle complète :

> We should recognize that the humanly understandable and humanly checkable proofs that we actually do are what is most important to us, and that they are quite different from formal proof. For the present, formal proofs are out of reach and mostly irrelevant: we have good human processes for checking mathematical validity. (Thruston, 1994, p. 171).

Boero (1999) conclut sur l'importance de la distinction entre l'énoncé d'un théorème en tant que produit et le travail sur les conjectures en tant que processus d'une part, et entre une preuve mathématique en tant que produit (Balacheff parlerait ici de démonstration) et le processus mathématique de preuve d'autre part.

II-4.2.3. Une mise en relation avec le problem-solving

Nunokawa (1996) met en lien le programme de recherche de Lakatos et le *problem-solving*, en étudiant plus spécifiquement les structures que mettent en œuvre les *solvers*. Nunokawa (1996) prend lui aussi un exemple en combinatoire (très proche de celui utilisé par Balacheff en 1987[28]), et met en évidence deux types de « bons » problèmes :

- Les nouveaux problèmes que l'on fabrique à partir d'un problème initial : cela peut être des sous-problèmes, des études de cas. Les étudiants génèrent alors des structures et les reportent, testent dans un cas plus général.
- Et les problèmes où la résolution du problème initial prend une nouvelle résonance, avec un changement de cadre.

Nous pouvons rapprocher cette catégorisation de problèmes de deux opérateurs lakatosiens :

$\mathbf{R_5^L}$: « formuler un nouveau problème », que nous complèterons dans la modélisation finale,

$\mathbf{R_5^L}$ et $\mathbf{R_4^L}$: « changer de cadre », qui est lié à l'opérateur précédent $\mathbf{R_5^L}$.

Il est bien évident que la relation au *problem-solving* dépasse largement l'article de Nunokawa (1996), ne serait-ce qu'en considérant la question des heuristiques et de leur

[28] Il s'agit de dénombrer le nombre de connexions dans un réseau, ce qui est semblable à dénombrer le nombre de diagonales dans un polygone.

« transmission » à des étudiants. Cela étant, rapporter ce travail nous a permis de retrouver assez logiquement des opérateurs lakatosiens peu souvent explicités dans les travaux, de voir encore un problème de combinatoire utilisé dans une perspective lakatosienne, et de ne pas oublier de faire un lien avec le *problem-solving*, qui reste à approfondir.

II-4.3. Des diagrammes pour représenter et transposer le processus de Lakatos – Retour sur la complexité de la gestion de situations impliquant une activité de définition

Une pratique de mathématicien. De Villiers (2000) souligne lui aussi l'intérêt de Lakatos, en propose un diagramme, et insiste sur l'importance de considérer les contre-exemples de manière heuristique et non logique. L'exemple qu'il propose sur une exploration de séries de Fibonacci s'appuie principalement sur la méthode *monster-barring* avec défense du théorème. On retrouve là le cheminement de P&R, sur un nouveau cas d'étude, ouvrant encore de nouveaux problèmes de recherche dans la communauté mathématique. La représentation proposée par De Villiers (2000, p. 12) que nous reproduisons ci-dessous (Figure 2) est une modélisation de l'activité mathématique du chercheur, à partir d'une conjecture.

De Villiers (2000) part de l'axiome suivant « un énoncé est vrai (T), si et seulement si, il peut être (déductivement) prouvé (P) » et le décline en quatre implications de formes logiques différentes :

(a) l'implication directe (T ⇒ P) : si quelque chose est vrai, alors cela peut être prouvé ;
(b) la réciproque (P ⇒ T) : si quelque chose a été prouvé, alors c'est vrai ;
(c) la négation (T' ⇒ P') : si quelque chose est faux, alors cela ne peut pas être prouvé ;
(d) la contraposée (P' ⇒ T') : si quelque chose ne peut pas être prouvé, alors c'est faux.

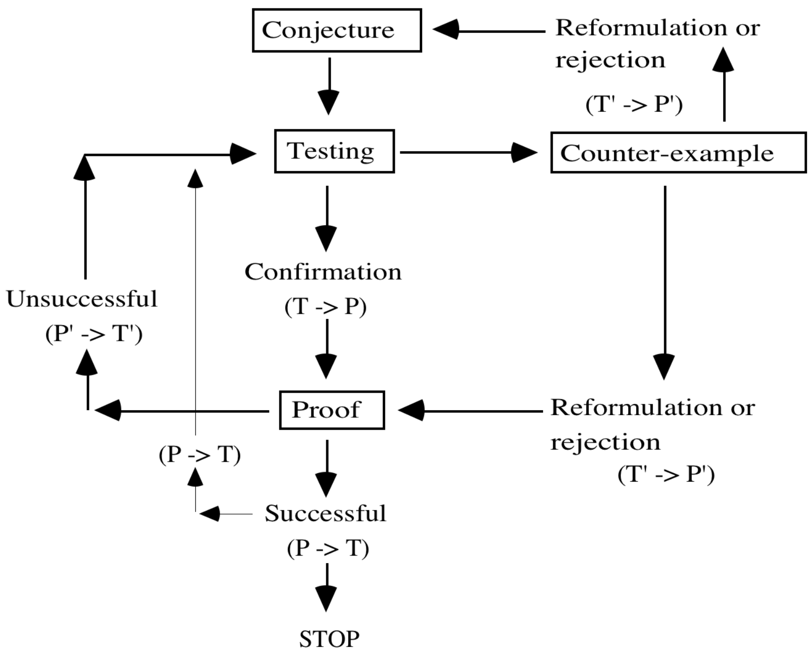


Figure 2 – Une représentation du processus de P&R chez De Villiers (2000, p. 20)

De Villiers souligne que, dans l'enseignement et les manuels, seule la réciproque est mise en avant, alors que dans la recherche mathématique, (a), (c) et (e) jouent un grand rôle pour orienter les actions du chercheur.

La complexité de la gestion de situations de définition illustrée sur un exemple arithmétique. Sriraman (2006) reprend le problème arithmétique suivant de Gardner (1997) avec six étudiants (agés de 14 ans ; la situation est pilotée par le chercheur lui-même dans un cadre très particulier[29]) : « Choisir un ensemble S de dix entiers positifs inférieurs à 100. Il y a toujours deux sous-ensembles d'entiers de S qui ont la même somme. »

Les questions posées aux étudiants sont : « Choisir des ensembles S et vérifier pourquoi cela arrive. Prouver que cela arrive toujours. »

Le cheminement des élèves est décrit dans un diagramme (reproduit en Annexe 3), inspiré du raisonnement plausible, où figurent *a posteriori* les moments importants de formulation des étudiants et de l'enseignant. Implicitement, et ce point n'est pas évoqué par Sriraman (2006), le statut des énoncés et exemples proposés par les étudiants est lui aussi crucial : si les étudiants ne perçoivent ni le statut des énoncés ni la portée, ce sera à l'enseignant d'orienter la recherche. Ce diagramme est ensuite converti, *a posteriori*, en diagramme à la Lakatos (Annexe 3).

Ce qui est notable dans ce second diagramme et finalement peu, voire pas, explicité par Sriraman (2006), ce sont les interventions de l'enseignant, et, *in fine*, la connaissance épistémologique des problèmes et concepts de celui-ci. Pour réaliser un tel diagramme et une telle gestion de la situation), l'enseignant « doit » :

- identifier un champ de problèmes connectés au problème initial et connecter le problème initial à des problèmes plus généraux ou sous-problèmes ;
- identifier toutes les notions et tous les principes mathématiques pouvant être en jeu dans la résolution du problème initial et des problèmes connectés ;
- et lors de la gestion de la situation (mais aussi *a priori*) :
  - demander aux étudiants des stratégies
  - questionner la portée d'une stratégie
  - donner un ou des contre-exemple(s)
  - proposer de nouvelles conjectures
  - faire formuler de nouveaux problèmes
  - demander de générer d'autres exemples
  - parvenir à problématiser d'autres preuves que celle en jeu, preuves dont la validité sera elle aussi interrogée.

Les éléments ci-dessus, extraits de la lecture des diagrammes de Sriraman (2006) seront intégrés dans notre modélisation finale de l'activité de définition (via des opérateurs, et avec des compléments), et permettront en particulier de considérer de manière plus complète la gestion de l'enseignant dans de telles situations.

Soulignons également que le type de problème utilisé dans les travaux de Sriraman (2006)[30] est spécifique, de nature combinatoire et ses caractéristiques sont les suivantes : l'énoncé est facile d'accès, ne comporte pas de notions mathématiques complexes, et des expérimentations sont rapidement réalisables afin d'explorer le problème. Sriraman (2006) indique que l'intérêt de ce type de problèmes réside dans le fait qu'il permet à l'enseignant d'accéder à une

[29] Les étudiants travaillent sur des problèmes *open-ended*, pendant une dizaine de jours et tiennent un journal (on pourrait rapprocher ce dispositif des narrations de recherche). L'enseignant (qui est Sriraman lui-même) conduit ensuite des entretiens avec eux.

[30] Sriraman (2006) nous indique également que ce type de problème permet de :

> (1) demonstrate the wide range of mathematics that become accessible in the secondary classroom via use of counting problems.
> (2) present the possibilities for mathematizing via student insights into the problem. (Sriraman, 2006, p. 154).

réflexion indépendante des contenus et problèmes habituels, et, nous pourrions ajouter, à une démarche semblable à celle que l'étudiant va vivre.

II-5. Vinner : un modèle cognitif pour appréhender la reconstruction de concepts – présentation et ouverture

Vinner a également souligné l'importance de construire des définitions : "The ability to construct a formal definition is for us a possible indication of deep understanding." (Vinner, 1991, p. 79). Dans la structure cognitive, Vinner affirme l'existence de deux pôles en interactions mutuelles : le *concept definition*, qui s'apparente à une définition formelle d'un concept, et le *concept image* qui, lui, est non verbal et de type « image mentale ». L'étude des concepts (et donc des *concepts images*) se fait donc par rapport à une vision formelle, celle du *concept definition.* Ainsi, les analyses sont « contraintes » d'une certaine façon par cette vision formelle et donc « fermée » du concept en jeu. On retrouve cet aspect formel de manière très forte dans la présentation des trois mondes de pensée (*worlds of thinking*) de Tall (2004) : Tall cherche en effet à donner une vision globale de la croissance mathématique. Son cadre laisse peu, voire pas de place à l'activité heuristique de définition : il ne considère en effet que les définitions formelles dans le monde formel (*formal world)*, et les caractérisations des deux autres mondes (*embodied world* et *proceptual world*) ne sont pas appropriées pour l'appréhension de concepts en construction. Il serait nécessaire d'ajouter à cette modélisation un monde intermédiaire, de niveau non-formel tel celui de P&R, où la construction heuristique de concepts prendrait sa place.

Revenons à Vinner. Au sein du cadre théorique des *concept image* et *concept definition*, Vinner cherche des situations où le *concept image* des étudiants comporte des lacunes afin de les engager dans un processus de reconstruction du *concept definition*. Ce type de situation est l'un de ceux proposés par Borasi qui décrit trois façons de concevoir des activités de définition (Borasi, 1992, p. 155) :

- une analyse approfondie d'une liste de définitions incorrectes d'un concept donné (ce que l'on pourrait rapprocher du *descriptive defining* (voir ci-après § II-6.1.)) ;
- l'utilisation de définitions dans des problèmes impliquant des preuves « à la Lakatos » ;
- l'étude du devenir d'une définition familière (et donc d'un concept familier) dans un contexte différent (ce que propose également Duchet (1995) avec des carrés sur la sphère, ou Ouvrier-Buffet (2006) avec des droites discrètes). La notion de *concept image* peut ici entrer en jeu.

Ce dernier type de situation peut impliquer des activités de définition se plaçant à des niveaux différents quant au point de vue axiomatique. Prenons l'exemple de définir dans le cadre de la géométrie sphérique ou discrète. Il s'agira en effet d'une recherche extrinsèque ou intrinsèque :

- une recherche extrinsèque si la géométrie euclidienne est considérée comme un outil d'investigation avec un travail de transposition de définitions existantes (on cherche à conserver une axiomatique existante avec des objets connus placés dans un autre cadre) ;
- une recherche intrinsèque si l'on construit une « autre » géométrie en cherchant de nouveaux principes applicables au nouveau cadre (on abandonne l'axiomatique connue au profit de la construction d'une nouvelle, locale, plus productive). Il s'agit en quelque sorte de « désinstitutionnaliser » le savoir préexistant, ce qui peut s'avérer déstabilisant.

Il est possible d'instrumenter de manière assez souple les concepts de *concept image* et *concept definition* et de les utiliser, au-delà de situations de reconstructions de concepts, dans toute situation impliquant des représentations d'un concept (notamment des exemples et non-exemples, voire contre-exemples, qui permettront de construire un premier *concept image*). Le courant actuel d'étude de productions de définitions à partir d'exemples et non-exemples s'inscrit principalement dans le cadre de Vinner (voir par exemple Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008). Il est possible, au niveau de l'activité de définition, d'aller bien au-delà de situations simples de classification à partir d'exemples et non-exemples, comme nous venons de l'esquisser sur l'exemple de la géométrie sphérique.

II-6. Freudenthal et ses successeurs : un modèle cognitif appliqué à l'activité de définition – RME (Realistic Mathematics Education) et DMA (Defining as a Mathematical Activity)

Nous allons ici faire état des travaux de Larsen, Zandieh et Rasmussen, qui constituent un pôle important des recherches sur l'activité de définition. Leurs apports se situent principalement à deux niveaux :

- un cadre théorique inscrit dans la *Realistic Mathematics Education* (RME) identifiant des moments de ce que nous pourrions appeler l'activité mathématique (initialement, il s'agissait de l'activité de modélisation, avec des niveaux plus formels que d'autres (Gravemeijer, 1999 ; 2002)) et faisant intervenir à la fois les notions de *concept image* et *concept definition* de Vinner (1991), mais aussi le cadre des P&R de Lakatos (1976) ;
- des expérimentations analysées dans ce cadre théorique sur lesquelles nous pourrons apporter un regard critique dont le but sera d'enrichir notre modélisation, mais aussi de valider, par cette voie expérimentale, certaines composantes de notre modélisation.

II-6.1. Freudenthal : redéfinir pour systématiser ou générer des connaissances (connaissances déjà partiellement connues ou données)

Certains chercheurs ont souligné la nécessité d'impliquer les élèves dans un processus de recherche proche de celui du mathématicien, et ce, souvent dans le vaste cadre du *problem-solving*. Freudenthal (1973) en particulier s'est penché sur les définitions en géométrie et sur leur aspect arbitraire, qu'il souhaite contourner en rendant les élèves acteurs de la classification des quadrilatères notamment. Il distingue deux types d'activité de définition :

- le *descriptive (a posteriori) defining*[31] qui consiste en une systématisation d'une connaissance existante, que l'on pourrait qualifier de caractérisation, mettant en évidence les invariants d'une classe d'objets ou d'actions déjà connues (ce n'est donc pas une « première rencontre » avec le(s) concept(s) en jeu) ; les définitions produites dans ce cadre ont pour vocation d'être des conditions nécessaires et suffisantes (il s'agit d'aboutir à des définitions minimales, nous sommes donc du côté « logicien » de l'activité de définition, sans pour autant entrer dans la formalisation ou dans une axiomatique) ;
- et le *constructive (a priori) defining*[32] qui s'intéresse à la génération d'une nouvelle connaissance. Repris par De Villiers (1998, 2000), ce dernier s'inscrivant aussi dans le

[31] "(...) outlines a known object by singling out a few characteristic properties." (Freudenthal, 1973, p. 457).
[32] "(...) models new objects out familiar ones." (Freudenthal, 1973, p. 457).

descriptive defining, le *constructive defining* est effectif quand une définition connue et/ou donnée est modifiée[33] ou quand une autre connaissance est définie à partir de définitions de connaissances déjà connues. Dans les deux cas, Freudenthal et De Villiers se penchent sur des concepts issus de la géométrie, soulignant l'importance de l'activité de définition dans la pensée géométrique (*geometric thinking*)[34]. Il peut s'agir, dans le cas du *constructive defining*, par exemple, d'inclure ou d'exclure une propriété, tout dépendra de la situation et du concept proposés. Il est important de souligner que le *constructive defining* n'est pas nécessairement centré sur un concept totalement nouveau. Nous le verrons dans les exemples étudiés ci-après, issus des différents travaux de Rasmussen, Larsen & Zandieh.

En réalité, nous pourrions encore élargir le *constructive defining* et l'étudier comme un changement de cadre (par exemple avec la définition de triangles sur la sphère) : les élèves connaissent déjà l'objet mathématique, ils le redéfinissent dans un nouveau système de contraintes.

Rappelons, en reprenant les propos de Larsen & Zandieh (2005), que Freudenthal (1973) avait déjà souligné l'importance de faire vivre une activité de définition aux étudiants :

> Freudenthal (1973) noted that definitions are generally not preconceived but are just the finishing touches of the mathematical activity of defining. He argued that students should not be denied the opportunity participate in this activity. (Larsen & Zandieh, 2005, p. 797).

Nous soulignons que la pratique d'une activité de définition, en géométrie (comme cela est proposé par Freudenthal (1973) mais aussi dans les différents travaux de Larsen, Zandieh et Rasmussen), demeure particulière, pour deux raisons : d'une part, les concepts géométriques ont une spécificité forte quant à leur accessibilité par un sujet via leurs représentations, mais aussi quant à leurs caractérisations (et donc définitions) qui sont multiples. D'autre part, le sujet qui va s'engager dans leur étude disposera d'une certaine familiarité avec les concepts géométriques. Nous reviendrons sur cet aspect concernant la « familiarité » lorsque nous caractériserons les concepts se prêtant à des situations de définition (§ II-8).

II-6.2. *Realistic Mathematics Education* (RME) et *Defining as a Mathematical Activity* (DMA)

***Advancing mathematical activity*.** L'idée centrale est de constituer une communauté d'étudiants et de faire évoluer leur pratique de l'activité mathématique au sein de cette communauté[35] : l'activité mathématique est considérée "in a variety of different socially or culturally situated mathematical practices." (Rasmussen et *al*., 2005, p. 52)). L'*advancing mathematical activity* est spécifique et différente de l'*advanced mathematical thinking* : cette nouvelle expression leur permet d'insister sur différents processus en construction (*advancing*) chez les étudiants et présents dans différentes activités mathématiques.

***Realistic Mathematics Education* (RME) et *guided reinvention*.** La notion de *reinvention* provient de la théorie de la *realistic mathematics education* (RME) en accord avec une activité mathématique humaine telle que l'a présentée Freudenthal (1973). La *guided*

---

[33] "(...) a given definition of a concept is changed through the exclusion, generalization, specialization, replacement or addition of properties to the definition so that a new concept is constructed in the process. In other words, a new concept is defined 'into being'." (De Villiers, 1998, p. 250).

[34] Ces auteurs utilisent également les niveaux de Van Hiele.

[35] Référence est faite par Rasmussen et *al*. (2005) aux travaux de Lave et Wenger (Lave & Wenger, 1991 ; Wenger, 1998).

reinvention se définit de la façon suivante et peut conduire à la production d'algorithmes, définitions, conjectures et preuves :

> The idea is to allow learners to come to regard the knowledge that they acquire as their own private knowledge, knowledge for which they themselves are responsible. (Gravemeijer & Doorman, 1999, p. 116).

L'idée de Larsen & Zandieh (2005) est d'étudier les interrelations possibles entre Lakatos et la *reinvention* aussi pour concevoir des *instructions*, et de considérer véritablement l'activité de définition comme un processus dynamique, en construction, et spécifique de l'activité de recherche : d'où la dénomination qu'ils retiennent de *Defining as a Mathematical Activity*, en parallèle de l'expression *Mathematics Advanced Thinking*.

II-6.3. Le cadre de Grevemeijer (1999, 2002) : des moments de l'activité mathématique

Rasmussen & Zandieh (2000) mettent en évidence quatre types d'activités, ou plutôt quatre moments, dans une volonté de proposer une progression, non nécessairement linéaire, d'un niveau informel vers un niveau formel (dans la continuité des travaux de Gravemeijer (1999), qui propose une telle gradation pour l'activité de modélisation), et qui donne un cadre au chercheur et au concepteur de situations où pourront être anticipés et décrits différents processus des étudiants (raisonnements, actions, symbolisations etc.). Ces quatre moments sont ainsi décrits par Gravemeijer (2002) :

- *situational activity :* activity in the *task setting*, in which interpretations and (situation-specific) solutions depend on understanding of how to act in that setting;
- *referential* activity, in which models-of refer to activity in the setting described in instructional tasks;
- *general* activity, in which an orientation on mathematical relations and strategies make it possible to act and reason independently of situation-specific imagery;
- (*formal* activity) more *formal* mathematical reasoning, which is no longer dependent on the support of models-for mathematical activity. (Gravemeijer, 2002, p. 2).

C'est dans ce cadre que Rasmussen & Zandieh (2000) et Zandieh & Rasmussen (2010) inscrivent deux situations impliquant une activité de définition (concept de triangle sphérique et concept de sous-groupe). Nous reviendrons plus en détail sur les analyses de ces situations ci-après. Indiquons d'ores et déjà qu'une mise en relation avec les concepts de *concept image* et *concept definition* y est instrumentée afin de faire ressortir une progression dans l'exploration du concept (en particulier pour le cas des triangles sphériques), et des extraits de protocoles sont analysés sous l'éclairage des P&R de Lakatos (1976). Cependant, aucune modélisation nouvelle du processus de P&R axée sur la construction de définition n'est proposée dans leurs travaux.

II-6.4. La vision du processus de définition chez Larsen, Rasmussen & Zandieh

Rasmussen & Zandieh (2000) se concentrent essentiellement sur le *constructive defining*, avec comme arrière-plan théorique la RME. Les travaux de Larsen, Rasmussen, et Zandieh véhiculent l'idée qu'un processus de définition passe par des définitions non formelles au début et des définitions plus formelles ensuite qui seront utilisées dans des raisonnements[36]. C'est cet aspect formel qui les conduit à transposer le cadre de Gravemeijer (1999, 2002).

Leur vision du processus de définition (Larsen & Zandieh, 2005) peut être résumée ainsi, mais elle demeure encore très générale :

> Zandieh and Rasmussen (in preparation) take defining to include not just formulating a definition but also activities such as negotiating and revising a definition. These activities may involve generating conjectured definitions, creating examples to test the conjectures, and trying to prove whether or not a conjectured definition "works" in the sense of doing the job that the definition is being created to do. Zandieh and Rasmussen include these activities as part of what they mean by defining. They also note that the defining process includes negotiating both the way the definition should be formulated and the deeper issue of what the concept should mean. (Larsen & Zandieh, 2005, p. 797).

Larsen & Zandieh (2005) proposent différentes catégories de ce qui pourrait être relié à des types de situations où la dialectique entre preuve et définition est prise en compte :

- la preuve comme motivation à l'activité de définition ;
- la preuve comme guide pour définir (prédominance du rôle des contre-exemples) ;
- la preuve comme un moyen pour valider une définition (nous pouvons considérer ici l'exemple de la dialectique plan/sphère pour l'étude des triangles, mais aussi la problématique d'équivalence entre définitions (pour l'exemple du sous-groupe) comme des lieux potentiels pour accéder à une validation d'une définition).

Nous allons maintenant présenter leurs situations expérimentales, et revenir sur la dimension théorique de leurs analyses, ainsi que sur la portée de ces travaux.

II-6.5. Deux situations : les triangles sphériques et le concept de sous-groupe (Rasmussen & Zandieh (2000) ; Larsen & Zandieh (2005) ; Larsen, Rasmussen & Zandieh (2010))

II-6.5.1. Présentation distanciée et critique des situations

Deux types de situations sont proposés dans différents articles (Rasmussen & Zandieh (2000) ; Larsen & Zandieh (2005) ; Larsen, Rasmussen & Zandieh (2010)), dans le cadre d'activités de définition s'inscrivant dans le *constructive defining* (ici, nous sommes sur la création de nouveaux objets à partir d'objets « familiers ») : il s'agit du concept de triangle sphérique et de la définition du concept de sous-groupe.

Le contexte et le dispositif. Le contexte de la situation sur les triangles sphériques est très particulier (Zandieh & Rasmussen, 2010). Il s'agit de 25 étudiants[37] lors d'une session de cinq semaines de type école d'été, à l'université. On voit, dans les extraits issus des différents articles, l'enseignant proposer des contre-exemples (lors de l'élaboration de définitions par des étudiants), contre-exemples qui seront ensuite réutilisés de manière quasi-systématique par les étudiants pour mettre à l'épreuve les *conjectured definitions* ultérieures (Larsen & Zandieh, 2005).

---

[36] "(...) our analysis suggests that definitions first come to the fore as a definition of students' previous activity and later these definitions serve as tools for further mathematical reasoning." (Rasmussen & Zandieh, 2000, p. 2).

[37] La composition de ce groupe d'étudiants est la suivante : neuf dont la discipline d'étude est l'informatique, trois pour lesquels il s'agit des mathématiques (dominante), un pour lequel les mathématiques est une discipline secondaire, cinq étudiants professeurs, sept enseignants de lycée (validant des UE pour l'obtention d'un master).

Pour la situation sur la redéfinition du concept de sous-groupe, les étudiants sont familiers de la *guided reinvention*, ce qui n'est pas neutre dans la gestion de la situation.

Les interactions en classe sont de trois types et ne sont que brièvement indiquées dans un seul article (Zandieh & Rasmussen, 2010) :
- discussion en classe entière, enseignant au tableau ;
- discussion en classe entière, un étudiant au tableau ;
- petits groupes.

Les triangles sphériques. La situation en question implique les triangles sphériques mais aussi l'exploration du cas d'égalité des triangles CAC (« Si deux triangles ont deux côtés égaux et les angles entre ces côtés égaux, alors ils sont isométriques »). Les étudiants doivent prouver le cas d'égalité des triangles CAC dans le plan, et étudier si ce cas d'égalité est encore vrai sur la sphère. S'il n'est pas vrai sur la sphère, on (l'enseignant ou chercheur gestionnaire de la situation) leur demande de générer un contre-exemple.

À l'issue de l'exploration de triangles sur la sphère le premier jour, les étudiants qualifient de « *small triangles* » des triangles sphériques proches de triangles du plan (influence du terme « *small* ») : les étudiants disposent en fait du livre d'Henderson (1996) (dont découlent les éléments de la situation proposée), où la dénomination de « *small triangles* » est utilisée. On leur demande ensuite de trouver un sous-ensemble de triangles sphériques pour lequel le cas d'égalité des triangles CAC est vrai. Lorsque les étudiants ont proposé une définition de triangle qui a du sens sur la sphère, ils cherchent ensuite à vérifier la validité du cas d'égalité des triangles CAC en ajoutant des conditions (en restreignant donc) la définition existante. La validation doit ainsi provenir du fait que le théorème (cas d'égalité des triangles) est valide pour la nouvelle classe de triangles ainsi définie. La preuve valide alors la définition.

Les discussions des étudiants ont été orientées suivant deux axes : prouver (par un contre-exemple) que le cas d'égalité des triangles CAC est faux dans le cas général sur la sphère et prouver que le cas d'égalité des triangles CAC est vrai pour tous les triangles du plan.

Nous apportons différents bémols aux analyses proposées : les définitions produites par les étudiants ne sont pas données dans les articles. L'évolution de la formulation n'est donc pas visible et il est difficile de déterminer précisément comment la dialectique entre preuve et définition s'est faite, et comment elle a effectivement impacté le contenu des définitions. La place et le rôle du/des gestionnaire(s) de la situation n'est jamais précisée, pas plus que la place et l'instrumentation du livre d'Henderson (1996), qui apparaît clairement comme non-neutre dans cette situation. Qui pose les questions aux étudiants ? Quelles questions les étudiants ont-ils générées ? Quelles sont leurs marges de manœuvre dans l'exploration (présence d'un logiciel ou non, de matériel ou non) ? Quelle est leur pratique d'une activité mathématique (installée sur le long terme ou pas) ? Et plus précisément, quelle est leur pratique des contre-exemples ? Beaucoup de questions restent sans réponse : ici, ce n'est pas tant le processus qui est décrit que différents moments d'une activité, comme nous allons le voir ci-après.

Une redéfinition du concept de sous-groupe. Cette situation est issue de la thèse de Larsen (2004), et s'inscrit dans le cadre de la *guided reinvention*. Les étudiants se sont déjà mis d'accord sur le fait qu'un sous-groupe est un sous-ensemble d'un groupe, et qu'un sous-groupe est aussi un groupe avec la même loi de composition interne. Ici, les étudiants établissent une définition équivalente à la définition de sous-groupe dont ils disposent. La validation provient du fait d'avoir effectivement une définition équivalente d'une part, et plus efficace d'autre part que la définition initiale (c'est-à-dire plus rapide, avec le plus petit nombre de propriétés, afin de prouver qu'un sous-ensemble est un sous-groupe, sans passer par les différentes vérifications concernant l'associativité, l'élément inverse, le neutre etc.). Pour l'analyse, les auteurs convoquent ici les heuristiques de Lakatos (1976), ce qui leur permet de mettre l'accent sur le processus.

La situation qu'ils proposent et planifient « à la Lakatos » est la suivante :

- La tâche : trouver le plus petit nombre de conditions suffisantes pour s'assurer qu'un sous-ensemble d'un groupe est un sous-groupe. Les définitions de groupe et de sous-groupe sont données.
- La définition donnée de sous-groupe : l'enseignant dit qu'un sous-groupe est un sous-ensemble d'un groupe qui est aussi un groupe, avec la même loi de composition (et clos pour cette loi).
- Conjecture initiale (qui doit être proposée par les étudiants) : tout sous-ensemble d'un groupe clos pour la loi de composition est un sous-groupe.
- La preuve en jeu s'orientera sur la propriété de clôture.
- Et les lemmes cachés sont les suivants :
    - Lemme 1 : chaque élément apparaît au moins une fois dans chaque colonne de la table du sous-ensemble (il faut que le sous-ensemble soit fini pour que ce lemme soit vrai).
    - Lemme 2 (moins probable) : le sous-ensemble doit être non vide.

La prise en compte du processus de P&R va ici jusqu'à décrire le lemme caché, ce qui est notable, ce sont les seuls auteurs à aller jusque-là dans l'utilisation des travaux de Lakatos (1976). Le concept ici s'y prête particulièrement.

II-6.5.2. Analyse de la situation des triangles sphériques – utilisation croisée du cadre de Graveimeijer (1999, 2002) et des notions de concept image / concept definition (Vinner, 1991)

Pour le cas des triangles sur la sphère, Rasmussen & Zandieh (2000) propose l'analyse suivante (que nous avons légèrement complétée afin de la rendre plus explicite). Cette présentation permet en fait d'organiser ou plutôt de penser une progression quant à l'activité de définition en différents moments :

- *Situational activity* : il s'agit de la formulation d'une définition de triangle dans le plan (où les droites ont une courbure nulle). Une telle activité est possible car les étudiants disposent d'une expérience issue du quotidien et issue de l'enseignement usuel des triangles en géométrie plane.
- *Referential activity* : l'exploration des triangles sur la sphère est conduite et la différence des propriétés entre triangles plans et triangles sphériques est interrogée. Il y a ainsi un retour sur la définition de « triangle », et une mise en correspondance entre « segments » dans le plan et « grand cercle » sur la sphère. L'extrait de conclusion d'étudiants proposé dans l'article utilise un exemple générique (figure représentant un triangle). C'est à ce moment que les auteurs parlent de la découverte du fait que trois points sur la sphère ne déterminent pas qu'un seul triangle mais deux (un *intérieur* et un *extérieur*).
- *General activity* : ce niveau est atteint lors de l'indépendance de la réflexion des étudiants par rapport au plan. L'activité se centre alors sur la recherche de la somme des angles intérieurs d'un triangle sphérique. Une conjecture peut être formulée (du type : la somme maximale des angles d'un triangle sphérique est de 1080 degrés). Un espace de travail pour une activité de définition se dégage.
- *Formal activity* : les triangles sphériques deviennent des objets à part entière. Un travail de recherche de triangles isométriques et l'utilisation de l'idée de « *small triangles* » sont alors engagés.

À ces différents niveaux, il serait possible de faire intervenir le cadre des P&R de Lakatos (1976), et d'expliciter davantage les processus potentiels, mais cela n'est pas fait par ces auteurs.

Zandieh & Rasmussen (2010) reprennent l'étude de ces quatre moments en intégrant les notions de *concept image* et *concept definition* et en insistant plus particulièrement sur deux types d'activités impliquant les définitions : utiliser et créer des définitions. Il s'agit en quelque sorte d'une reformulation du *descriptive defining* et *constructive defining*. Ils obtiennent alors la description suivante :

- *Situational activity* : création d'un *concept definition* à partir d'un *concept image*. Il s'agit de définir « triangle » dans le plan.
- *Referential activity* : utiliser un *concept definition* pour créer un *concept image*. Ici, il s'agit d'utiliser des définitions de triangles planaires (*concept definition*) pour générer des exemples de triangles sphériques et en appréhender des premières propriétés, et ainsi générer un *concept image* de triangle sphérique.
- *General activity* : créer des *concept image* et *concept definition*. Il s'agit d'explorer le cas d'égalité des triangles CAC.
- *Formal activity* : utiliser des *concept image* et *concept definition* établis. On poursuit l'exploration et la preuve de propriétés sur la sphère (question du parallélisme, exploration des lunes etc.). Ici, très important, et curieusement selon nous, les auteurs précisent qu'il n'y a pas de modification ni de retour sur les définitions précédemment construites.

Ainsi, cette formalisation de différents niveaux permet de situer différents moments où une redéfinition de concepts va être conduite, soit dans le cadre connu de la géométrie plane, soit dans le nouveau cadre de la géométrie sphérique avec une recherche extrinsèque[38]. La notion de *concept image* permet d'insister sur ce que nous pourrions rapprocher du *descriptive defining* avec un concept et d'un niveau de mathématisation horizontale au sens de Treffers (1987) (voir § II-6.6.).

Les travaux de Swinyard (2011), utilisant eux aussi le cadre de la *guided reinvention*, explorent plus spécifiquement le niveau *situational* pour la redéfinition du concept de limite. Dans son expérimentation, basée sur la discussion entre deux étudiants[39] à partir d'un problème initial impliquant des représentations de limites particulières (représentations algébriques, étude de fonctions continues ou discontinues, demande de génération d'exemples prototypiques de fonctions etc.), différentes définitions sont produites sur les neuf séances réalisées (la progression des définitions figure en Annexe 4). Mais la première définition de limite n'est véritablement formulée qu'à la quatrième séance, ce qui montre l'importance de l'étude du processus même de la construction de définitions, au sein de chacun des niveaux, et le temps long nécessaire à une telle activité mathématique. Nous avons déjà abordé la complexité de la gestion de situations impliquant une activité de définition, Swinyard (2011) revient sur cet aspect en conclusion, d'autant plus qu'il était le gestionnaire de la situation :

> (...) as the researcher, I intervened on multiple occasions to guide them towards paths I felt might be productive. Directing them to center their discussions around graphical representations, shifting their focus to reinventing a definition of limit at infinity, and purposely engaging them in conversation designed to elicit a shift to a *y*-first perspective were

[38] C'est-à-dire : l'étude de la transposition au cadre de la géométrie sphérique des concepts du plan et les théorèmes de la géométrie euclidienne du plan va être conduite.

[39] Le processus de définition est décrit de manière linéaire dans l'article de Swinyard (2011) sur le seul exemple de la discussion entre ces deux étudiants, et donc dans des conditions expérimentales très particulières et restreintes, nous ne pouvons en conclure aucune généralisation.

> all substantive interventions on my part as the researcher. The key, though, was that Amy and Mike took ownership of the iterative process of constructing a precise definition of limit, an in so doing, developed sophisticated understanding of what is a complex mathematical idea. (Swinyard, 2011, p. 112).

Nous pouvons ici insister de nouveau sur des aspects primordiaux du côté de la gestion de situation de définition, aspects à prendre en compte dans le cas de la transmission de telles situations à des enseignants et donc dans la modélisation de l'activité de définition : le gestionnaire de la situation doit avoir connaissance de ce qui compose un processus de construction de définitions, mais il doit aussi maîtriser les concepts et les heuristiques qui permettent de les appréhender, tout comme les types de problèmes qui permettent de les générer.

II-6.5.3. Analyse de la situation du concept de sous-groupe (Larsen & Zandieh, 2008) – utilisation du cadre de Lakatos (1976)

Larsen & Zandieh (2005) cherchent à utiliser le cadre de Lakatos (et la dialectique entre prouver et définir) pour développer une meilleure compréhension et une meilleure approche théorique de l'interaction entre des moments importants de l'activité mathématique. Leur article de 2008 vise à en faire un cadre théorique adapté à la didactique, notamment en l'inscrivant dans la perspective de la *guided reinvention*.

Larsen & Zandieh (2008) reprennent de Lakatos les quatre niveaux du processus de P&R qu'ils résument ainsi : conjecture initiale, preuve, émergence de contre-exemples globaux, analyse de la preuve et *proof generated concepts*. Ils insistent sur le fait d'utiliser des situations comprenant une conjecture initiale et une justification de celle-ci, nous avons déjà évoqué les contraintes initiales fortes nécessaires à une situation « à la Lakatos ». Larsen & Zandieh (2008) précisent que la conjecture en question peut comprendre (ou non) des concepts dont les définitions peuvent poser problème (soit au niveau mathématique, soit au niveau de la compréhension que les étudiants ont des concepts en jeu), et que un ou plusieurs contre-exemples à la conjecture sont possibles.

Larsen & Zandieh (2008) décident d'orienter leur analyse sur deux aspects, afin d'étudier l'activité mathématique des étudiants sur la redéfinition du concept de sous-groupe :

- ce qui retient l'attention des étudiants (contre-exemples, définition(s), conjecture, preuve) ;
- si le résultat de l'activité des étudiants concerne la modification de définition(s) ou de la conjecture.

Reprenant les heuristiques de Lakatos, Larsen & Zandieh (2008) insistent sur les trois activités suivantes : *monster-barring*, *exception-barring*, critique de la preuve analytique.

Table 1 Reframing the methods of mathematical discovery described by Lakatos (1976)

Type of activity	Focus of activity	Outcome of activity
Monster-barring	Counterexample & underlying definitions	Modification or clarification of an underlying definition
Exception-barring	Counterexample & conjecture	Modification of the conjecture
Proof-analysis	The proof, the counterexample, & the conjecture	Modification of the conjecture & sometimes a definition for a new proof-generated concept

Tableau 4 – Le processus de P&R selon Larsen & Zandieh
(Larsen & Zandieh, 2008, p. 208-209)

Nous pouvons les préciser davantage en décrivant plus finement le processus et, quand ce sera possible, les interventions de l'enseignant :

- Activité *monster-barring* (relégation de monstres – rejet du contre-exemple) : on considère toute réponse où le contre-exemple est rejeté car en dehors du concept en jeu. L'activité des étudiants est alors centrée sur le contre-exemple et la ou les définition(s) sous-jacente(s) ;
- Activité *exception-barring* (relégation des exceptions pour améliorer la conjecture) : il s'agit de la modification de la conjecture pour exclure un contre-exemple, sans référence à la preuve. L'activité des étudiants est ici centrée sur le contre-exemple et la conjecture ;
- Activité *proof-analysis* (critique de la preuve-analytique – c'est le lieu des lemmes cachés) : il s'agit de modifier plutôt la conjecture pour que la preuve fonctionne, au lieu d'exclure le contre-exemple de la conjecture. L'activité des étudiants est centrée simultanément sur la preuve, le contre-exemple, la conjecture (possibilité de déboucher sur un *proof-generated concept*).

L'émergence d'un contre-exemple global à la conjecture ne venant pas des étudiants, celui-ci est donné par l'enseignant. C'est l'enseignant qui va gérer le passage à la méthode de relégation des exceptions pour améliorer la conjecture, non pas en rejetant le contre-exemple (le monstre), ce qui permet de faire un focus sur la conjecture et le contre-exemple. C'est alors que deux autres conjectures vont être proposées et réfutées par les étudiants. Les étudiants ont en effet des difficultés à reconnaître le contre-exemple en tant que tel, et, pour que la définition ou la conjecture soit modifiée, la gestion de la situation doit être anticipée. Dans la description de l'expérimentation, les étudiants ont tout d'abord tenté de rejeter le contre-exemple, puis de l'exclure du domaine de validité du théorème. La critique de la preuve-analytique va leur permettre de produire une conjecture améliorée (étude du cas fini) et le processus aboutit à une version classique du théorème suivant : « Un sous-ensemble non vide, clos, d'un groupe est un sous-groupe. ». Il est difficile d'évaluer exactement quelle a été la part de l'enseignant dans ce processus car elle n'est pas analysée par les auteurs.

En définitive, Larsen & Zandieh (2008) valorise l'utilisation du cadre de Lakatos (1976) car il permet de décrire et expliquer l'activité des étudiants, mais aussi de conforter l'idée de *reinvention*. En effet, les heuristiques de Lakatos soutiennent la *reinvention*, en accord avec le « principe de nécessité » présenté par Harel (1998)[40], et permettent de proposer des scénarii de conception de « situations à la Lakatos » selon la méthode suivante qui rejoint une partie de ce que nous avons analysé précédemment dans les travaux de Sriraman (2006) : pour engager les étudiants dans la *reinvention*, prendre un concept, identifier les résultats mathématiques fondamentaux impliquant ce concept, étudier les preuves qui pourraient permettre de générer le concept en question, évaluer ce qui pourrait constituer une conjecture primitive. Du côté de la gestion en classe (qui n'est pas l'objet d'étude de Larsen & Zandieh (2008)), cela signifie côté enseignant et/ou étudiants de favoriser l'émergence de contre-exemples, de gérer l'attention des étudiants sur la preuve, la conjecture, le(s) contre-exemple(s) mais aussi

[40] Harel (1998) met en avant le principe de nécessité : il requiert la détermination de ce qui peut relever d'un besoin intellectuel dans une population d'étudiants, relativement à un concept mathématique donné, le choix d'un "bon problème" dont la solution permettra d'aboutir à la découverte du concept (une aide peut être apportée aux étudiants dans la découverte du concept). Il propose trois types de "nécessité intellectuelle" que nous pouvons mettre en relation avec des conceptions et fonctions des définitions : nécessité de *computation* (fonction calculatoire), nécessité de *formalisation* (fonction de théorisation), nécessité *d'élégance* (définir de manière élégante, peut-être minimale, non redondante, en limitant le nombre d'axiomes).

l'analyse de la preuve afin d'engager la construction d'un *proof-generated concept*, ce qui est loin d'être anodin.

II-6.6. Une dernière vision théorique de l'activité mathématique : *horizontal mathematizing* et *vertical mathematizing* (Treffers, 1987)

La pratique sociale et culturelle de l'activité mathématique, déjà évoquée dans les travaux de Freudenthal (1973), se retrouve notamment dans des activités transversales aux mathématiques, d'où leur intérêt, telles que la symbolisation, l'algorithmitisation, la définition, la justification (Rasmussen et *al*., 2005). Ces différentes activités sont analysées suivant deux axes par Rasmussen et *al*. (2005) – *horizontal mathematizing* et *vertical mathematizing* – repris de Treffers (1987) et que nous pouvons présenter ainsi :

- *horizontal mathematizing* (mathématisation horizontale) : cette activité (ou ensemble d'activités) s'apparente à une activité de modélisation mathématique d'un problème concret[41]. Le problème initial est non-mathématique chez Treffers (1987) mais Rasmussen et *al*. (2005) élargissent la notion aux problèmes mathématiques et présentent l'activité de mathématisation horizontale comme une activité de formulation d'un problème mathématique incluant des processus tels que expérimenter, rechercher des modèles ou structures, classer, conjecturer, et organiser ;
- *vertical mathematizing* (mathématisation verticale) : cela représente ce qui est basé et construit à partir des activités de mathématisation horizontale. Cela inclut en particulier des raisonnements sur des structures abstraites, des processus de généralisation et de formalisation. Nous pourrions rapprocher cette dimension de la mathématisation des concepts FUG (formalisateurs, unificateurs, généralisateurs) (Dorier et *al*., 1997).

L'idée est de donner un cadre pour analyser une progression dans la mathématisation. Ces deux types de mathématisation, horizontale et verticale, peuvent se succéder de manière cyclique. Ce cadre n'est pas incompatible avec celui de Gravemeijer (1999, 2002) allant d'un niveau informel vers un niveau formel.

Trois exemples d'utilisation de ce cadre (symboliser, algorithmiser, définir) sont donnés dans l'article de Rasmussen et *al*. (2005), mais ce cadre n'est pas réutilisé dans leurs travaux ultérieurs. Des études de cas se situent souvent dans le niveau dit horizontal et des questionnements sur les objets en jeu se positionnent dans le niveau dit vertical. Un retour peut ensuite être opéré au niveau horizontal.

Nous pouvons faire la relecture suivante de la présentation de l'activité de définition donnée par Rasmussen et *al*. (2005) aux niveaux horizontal et vertical : dans le cadre d'une activité mathématique de définition, un premier contact avec ce type d'activité mathématique doit se faire avec des concepts familiers, au niveau horizontal. Rasmussen et *al*. (2005) donnent l'exemple de la définition de triangle, dans le plan et mettent en évidence la nature des questionnements relatifs à une telle activité de définition. Il s'agit en fait, même si cela n'est pas présenté ainsi, d'un travail de reformulation de définition d'objets mathématiques déjà connus. On retrouve là certaines des conceptions sur ce que doivent être des définitions mathématiques présentées dans d'autres articles (voir par exemple Zaslavsky & Shir, 2005), à savoir : une définition ne doit pas être redondante, peut nécessiter la définition d'autres termes, doit séparer les exemples des non-exemples, doit prendre en compte les cas triviaux et extrêmes. Ce niveau horizontal dans l'activité de définition permet en fait une « première rencontre » avec le processus de définition. Il se situe dans ce que Zandieh & Rasmussen

[41] "(...) transforming a problem field into a mathematical problem." (Treffers, 1987, p. 247).

(2010) ont dénommé *definition-of*. Ils introduisent également le terme de *definition-for*, lors de l'utilisation de définitions dans un raisonnement ; ces deux acceptions sont des prolongements de *model-of* et de *model-for* de Gravemeijer (2002), mais ne sont pas exploitées davantage par la suite.

Pour accéder à une activité mathématique de niveau vertical, de *constructive defining* pour le cas de l'activité de définition (car cela implique une construction nécessaire de nouveaux concepts), on peut interroger, pour les triangles, le passage du plan à la sphère. Ce niveau est effectivement vertical, car il implique des processus de construction de nouveaux concepts, d'étude des liens entre ces concepts, et pose la question de la généralisation et de l'émission de conjectures. L'étude d'un « nouveau monde » alors constitué des triangles sur la sphère, devenus ainsi des objets mathématiques familiers, peut de nouveau se situer à un niveau horizontal, et l'on peut revenir au niveau vertical (par exemple, en introduisant l'étude des cas d'égalités des triangles sphériques).

En définitive, distinguer les niveaux horizontal et vertical dans le cas d'une activité de définition peut permettre schématiquement de dissocier ce qui relève de la formulation de définitions de ce qui relève du processus heuristique de construction de définitions, et fait ressortir la dimension « familiarité » avec les objets et concepts, qui a une place particulière dans l'activité de définition et sur laquelle nous reviendrons plus en détail.

II-7. Enseigner ce que sont les définitions mathématiques et outiller les enseignants – Les travaux de Edwards & Ward (2004, 2008) et Kobiela & Lehrer (2012)

II-7. 1. Les propositions de Edwards & Ward (2004, 2008) pour la formation des étudiants à l'université

Edwards & Ward (2008) soulignent l'importance non seulement de la compréhension du concept en jeu dans une définition, mais aussi du rôle des définitions en mathématiques, en particulier sur le plan axiomatique. L'importance culturelle des définitions dans l'activité du mathématicien est également soulignée : "The role and use of mathematical definitions is deeply imbedded in the culture of working mathematicians." (Edwards & Ward, 2008, p. 224). Ils proposent deux catégories de définition, inspirées notamment de la philosophie (Robinson, 1954), afin de distinguer les définitions en mathématiques et les définitions ordinaires (dans la vie quotidienne) :

- les définitions ordinaires sont dites *lexicale*, ou *extracted definitions*, (liées à l'usage et fréquemment construites à partir d'exemples de la notion en jeu) ;
- et les définitions mathématiques sont dites *stipulative* (*stipulated definitions*), et marquent clairement la dénomination, c'est-à-dire le moment où un concept prend un nouveau statut.

Il est vrai que nous n'avions pas encore rappelé l'importance du moment concernant la dénomination, qui permet de fixer l'attention sur un nouvel objet et de lui conférer une existence, ce qui permet son étude :

> La dénomination c'est-à-dire le choix d'un nom pour une notion est un acte important. Il marque qu'on porte à cette notion un intérêt durable. Il est nécessaire de ne l'accomplir qu'à bon escient. En principe les dénominations ne devraient pas créer de difficultés en mathématique où tout terme a un sens bien précis. (Kuntzmann, 1976, p. 78).
>
> Aussi bien, utiliser un nom commun pour classer, c'est en l'utilisant vouloir le projeter. (Hacking, 1993, p. 124).

Au niveau théorique s'ajoute dans les travaux d'Edwards & Ward (2004, 2008), sur le plan cognitif, la distinction déjà présentée *concept image* / *concept definition* de Vinner (1991).

Leurs recherches les conduisent à formuler certaines surprises relatives à la compréhension des étudiants quant à la nature des définitions mathématiques :

> Many students do not categorize mathematical definitions the way mathematicians do. (...) Many students do not use definitions the way mathematicians do, even when the students can correctly state and explain the definitions. (...) Many students do not use definitions the way mathematicians do, even in the apparent absence of any other course of action. (Edwards & Ward, 2008, pp. 415-417).

Ce qui est notable dans ce travail, à notre avis, ce n'est pas l'investigation des auteurs auprès d'étudiants qui conclut assez logiquement sur la méconnaissance des étudiants quant à la place et au rôle des définitions dans l'activité mathématique, mais une remarque fondamentale issue d'entretiens avec des étudiants : "(...) the notion of mathematical definitions may be a "teachable" concept." (Edwards & Ward, 2008, p. 228) et un constat auquel nous adhérons bien sûr pleinement : "To develop this understanding requires treating mathematical definition as a concept in its own right by promoting an understanding of the role of definitions in mathematics." (Ibid., p. 229). Edwards & Ward (2008) insistent également sur le danger de donner des définitions de manière ostensive et défendent l'idée de travailler avec des définitions en construction (*working definitions*). Les propositions qui en découlent se situent à trois niveaux :

- **Les types de situations** que pourraient fréquenter les étudiants et qui permettent d'aborder une activité de définition (on retrouve ici la situation des triangles sur la sphère, où l'on s'interroge sur la somme des angles et un cas d'égalité des triangles – situation proposée à partir d'un extrait du livre d'Henderson (1996)). Il s'agit principalement, dans les exemples donnés, de la redéfinition d'un concept familier dans un autre contexte (le triangle), en dialectique avec une problématique de preuve portant sur la somme des angles d'un triangle sur la sphère. Pour ces auteurs :

  > They must do what all mathematicians do - look for the special case or cases for which the theorem is valid. This leads to a special definition of a "small triangle," one for which SAS is true on the sphere. (Edwards & Ward, 2004, p. 420).

- **Une initiation** à ce que nous pourrions apparenter **à une pratique des mathématiques** : Edwards & Ward (2004) propose de s'appuyer, dans un cours à l'université, notamment au sein de cours d'axiomatique (en géométrie) et d'initiation à la preuve :
  - sur un enseignement de l'usage des définitions en mathématiques (le point d'appui pour ces auteurs est constitué de deux ouvrages à destination d'étudiants et d'enseignants du supérieur où les définitions sont utilisées essentiellement pour rédiger des preuves et expliciter des concepts avec des définitions équivalentes) ;
  - sur les concepts de Vinner (1991), illustrés par des exemples, afin d'engager les étudiants dans une posture réflexive quant à leur démarche de preuve et de réinvestissement de concepts déjà appréhendés en cours.

- **La formation des enseignants** : Edwards & Ward (2004) propose d'intervenir, en amont, sur la place et le rôle des définitions en mathématiques, dans la formation des enseignants.

II-7.2. Outiller les enseignants - Kobiela & Lehrer (2012)

Une pratique de la définition, selon Kobiela & Lehrer (2012, p. 202) est relative à :

- produire des définitions, au sein d'un dispositif de construction de connaissances collectif ;
- examiner finement les propriétés des objets définis ;
- considérer le réseau d'objets à partir desquels sont définis les nouveaux objets.

Nous retrouvons ici une situation maintenant classique : il s'agit de définir « polygone ». Kobiela & Lehrer (2012) tentent de faire un focus sur l'enseignant gérant l'activité de définition et la façon dont les étudiants sont impliqués dans une telle activité, et c'est là un point peu travaillé en recherche jusqu'à aujourd'hui. Ils proposent tout d'abord une synthèse de ce qui intervient dans des activités de définition, sans préciser de quels types de problèmes initiaux il s'agit. Les aspects logiciens sont particulièrement prédominants, ce qui montre une conception de la définition peu orientée sur l'heuristique. Ces auteurs énumèrent ainsi ce que nous pourrions retrouver dans les opérateurs décrits dans les conceptions :

- arguments définitionnels et explications : pour justifier l'inclusion ou l'exclusion d'une définition, d'un exemple ; pour accéder à une définition minimale ; pour discuter des propriétés de l'objet défini ;
- construire et/ou évaluer des exemples et/ou contre-exemples ;
- réviser les définitions (à l'attention de la communauté constituée par la classe) ;
- proposer des définitions : soumettre des définitions à la classe, les réviser etc. ;
- poser des questions sur les définitions, les propriétés etc.

En définitive, le rôle de l'enseignant est quant à lui décrit avec les éléments suivants : inciter les étudiants à définir, à reformuler, à générer des exemples d'objets particuliers vérifiant - ou ne vérifiant pas - certaines propriétés, écrire les définitions successives au tableau. L'enseignant amène les étudiants sur une activité de définition, accompagne l'exploration du concept. Leur analyse montre clairement l'importance de la gestion de l'enseignant et tend à proposer un mode de gestion d'activités définissantes, l'un de leurs objectifs principaux étant d'outiller les enseignants. Nous mesurons aisément la nécessité de prendre en compte cette question didactique et d'être à même de proposer un modèle plus consistant et structurant que les éléments donnés par Kobiela & Lehrer (2012).

II-8. Conclusions et ouvertures

II-8.1. Mise en perspective des différents cadres théoriques

Les cadres théoriques mobilisés dans les différents travaux impliquant la construction de définitions permettent de souligner des éléments de l'activité mathématique de définition. Ces cadres peuvent s'agencer de la façon suivante (Figure 3). Nous pouvons mettre en évidence trois types de recherches :

1) Des reprises récurrentes du travail épistémologique de Lakatos (1976) qui apparaît comme prédominant (De Villiers, 2000 ; Lampert, 1990 ; Sriraman, 2003, 2006, 2008 ; Larsen & Zandieh, 2005, 2008 ; Zandieh & Rasmussen, 2010). Dans ces travaux cependant, aucune modélisation ni critique de l'utilisation didactique de Lakatos n'ont été conduites. Nous allons donc prendre en charge ce travail.
2) Une dimension cognitive découlant des travaux de Freudenthal (1973) et de Vinner (1991) (l'ensemble des travaux de Larsen, Zandieh et Rasmussen).
3) Une modélisation épistémologique de conceptions sur la construction de définitions à usage didactique (l'ensemble de nos travaux).

Dans les travaux de type 1) et 2), les aspects philosophiques et épistémologiques sont parfois présents mais rarement, et ils convergent essentiellement vers la vision de Lakatos. De plus, la conception, l'analyse, la reproductibilité, et donc la gestion, des situations impliquant une activité de définition en classe (niveau primaire, secondaire ou supérieur) ne sont pas prises en charge ou lorsqu'elles le sont, cela reste très vague. C'est à ces deux aspects en particulier, à savoir la modélisation épistémologique de l'activité de définition et sa transposition didactique, que notre travail de recherche va apporter des réponses (partie III).

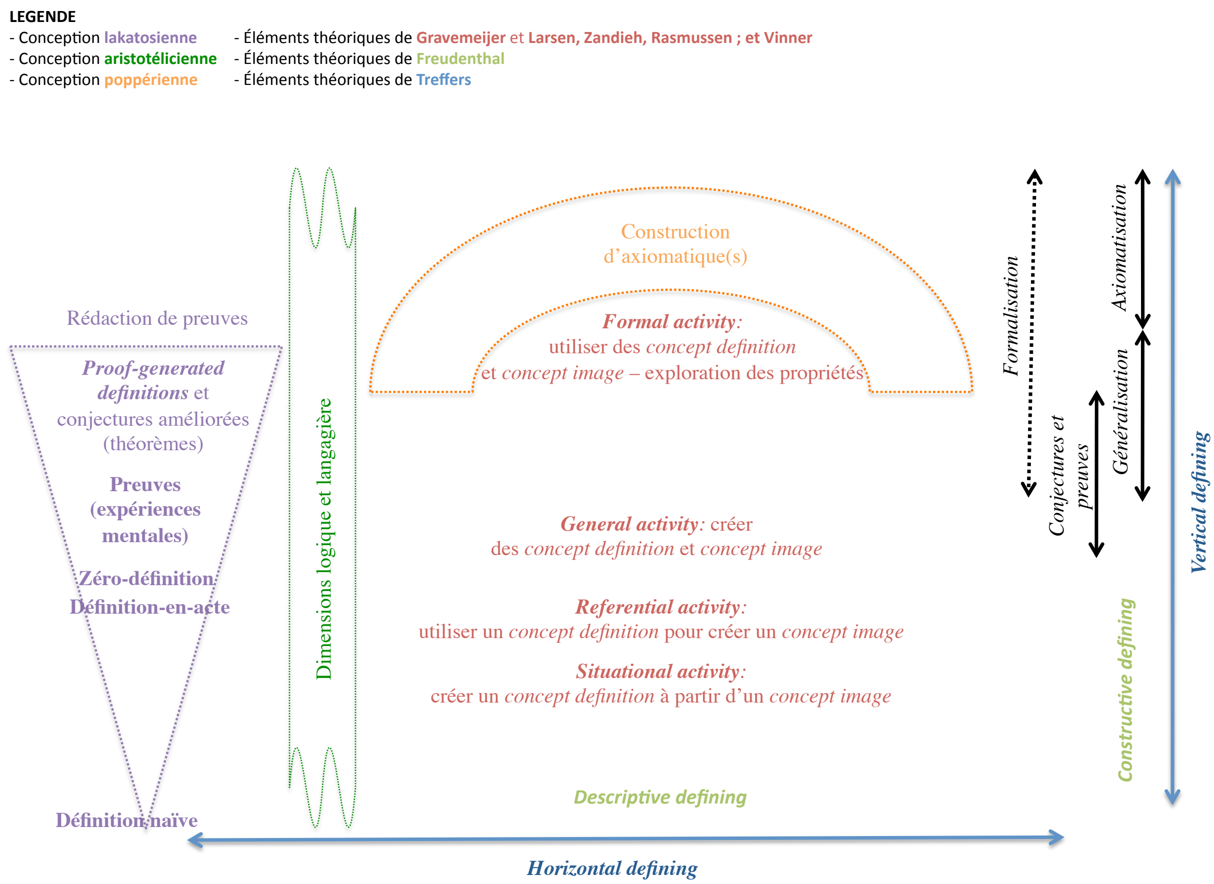


Figure 3 – Mise en perspective des différents cadres théoriques

Pour réaliser cette représentation, nous avons choisi comme axes de référence les activités de mathématisation horizontale et verticale de Treffers (1987) : au niveau horizontal, la définition s'apparente plutôt à une redéfinition d'objets ou de concepts déjà partiellement connus (où préexiste un *concept image*), alors que le niveau vertical permet d'envisager la construction de nouveaux concepts et d'accéder à un niveau de formalisation plus élaboré (construction d'axiomatiques). Nous avons déjà pointé, lors de l'analyse des travaux existants précédente, les connexions possibles entre le *descriptive defining* et le *constructive defining* de Freudenthal (1973) avec ces niveaux horizontal et vertical. Les quatre types d'activité de Gravemeijer (1999) s'agençant d'un niveau peu formel à un niveau formel peuvent être situés sur l'axe vertical. Le lien réalisé par Zandieh & Rasmussen (2010) avec les notions de *concept image* et *concept definition* permettent de les préciser sur cet axe justement. Nous avons également intégré les conceptions lakatosienne, aristotélicienne, et poppérienne et les différents types de définition que nous avons déjà utilisés pour des analyses *a priori* et *a posteriori* (Ouvrier-Buffet, 2006 ; 2011). Il apparaît dans cette représentation que les conceptions couvrent effectivement la majeure partie de l'activité mathématique de définition, contrairement aux autres cadres qui n'en abordent qu'un aspect. Cependant, nous avons déjà montré la nécessité de considérer d'autres « niveaux » de manière plus fine lors de l'exposé des conceptions, notamment celui des définitions-en-acte qui n'apparaît pas dans le modèle des conceptions, ni sur la figure 3, et de décrire, dans la mesure du possible, plus finement encore l'activité de définition, afin de souligner la dialectique avec la preuve, mais aussi l'articulation entre les conceptions. De plus, certains éléments des différents cadres théoriques que nous avons recensés dans ce travail vont nous permettre d'enrichir notre modélisation, notamment en ce qui concerne l'activité mathématique de définition et la conception de situations de définition (les travaux existants, nous le verrons, ne couvrent certes qu'une partie des types de problèmes impliquant une activité de définition, mais donnent des illustrations concrètes). Enfin, insistons encore sur l'opérationnalité du modèle des conceptions qui nous donnent de réels observables quant à l'activité de définition, ce que n'apportent pas les autres travaux sur le sujet (en dehors de ceux reprenant partiellement des éléments du travail de Lakatos).

Nous allons maintenant revenir sur les conditions expérimentales des travaux portant sur l'activité de définition, ainsi que sur la caractérisation des problèmes permettant une activité de définition. Nous aborderons également la spécificité de concepts se prêtant plus que d'autres à une activité de définition. Nous reviendrons à ce sujet sur la notion de « concepts familiers » que nous interrogerons, sur l'axiomatique locale nécessaire à une activité de construction de définitions, ainsi que sur la transmission et la gestion de situations de définition.

II-8.2. Des conditions expérimentales très favorables

Dans l'ensemble de ces travaux (à l'exception des nôtres), les conditions expérimentales sont toujours très spécifiques. Il s'agit d'expérimentations pilotées par les chercheurs eux-mêmes (que nous appellerons « gestionnaires de la situation »), avec des effectifs restreints (de 2 à 15 élèves voire 25 étudiants), parfois même avec des élèves surdoués. Le travail de recherche des étudiants est toujours un travail en groupe avec des supposées institutionnalisations pilotées par le gestionnaire de la situation (ces institutionnalisations ne sont pas décrites ni questionnées, mais leur existence transparaît dans les articles présentant les travaux). Lorsqu'une activité de définition des étudiants est décrite, les leviers qu'utilise(nt) le(s) gestionnaire(s) de la situation et qui permettent une évolution des processus des étudiants ne sont pas explicités.

Si nous nous intéressons maintenant aux spécificités des situations et concepts utilisés dans ces expérimentations, nous pouvons noter que :

- les types de situations impliquant une activité de définition sont de deux types : il s'agit principalement de redéfinition de concepts familiers ou de changement de cadre de concepts déjà connus des étudiants ;
- les concepts mathématiques utilisés dans les expérimentations sont hors curricula ou déjà partiellement connus des étudiants ;
- le matériel à la disposition des étudiants peut aussi inclure un manuel comprenant des éléments qui vont être utiles au processus des étudiants, voire des définitions de départ.

Ces caractéristiques, tant au niveau des dispositifs et de la gestion que des situations et concepts retenus, posent de manière forte la question de l'implémentation de situations impliquant une activité de définition en classe, quel que soit le niveau, et de la gestion de celles-ci.

Nos expérimentations, quant à elles, ont porté principalement sur l'étude de concepts discrets et problèmes issus des mathématiques discrètes, au niveau du supérieur (première année d'université), donc hors curricula. Nous avons bénéficié de faibles effectifs (une dizaine ou une vingtaine d'étudiants travaillant en groupes). L'une des caractéristiques principales des concepts et problèmes que nous avons utilisés réside dans leur accessibilité par leurs représentations et leur exploration. Par ailleurs, certains des concepts que nous avons utilisés sont encore en construction dans la recherche mathématique (objets géométriques discrets ; problème de Frobenius), ce qui permet de créer des conditions où étudiants et gestionnaire de la situation disposent d'un même bagage conceptuel face à une situation impliquant un « nouveau » concept.

Les types de situations utilisées dans nos expérimentations étaient principalement des situations de classification, la preuve étant un lieu de validation des définitions construites (il n'était pas question de viser l'émergence d'un lemme caché à la Lakatos). Nous avons également investi de manière exploratoire les niveaux primaire et secondaire en travaillant sur une situation de classification sur la convexité (en primaire) et sur le concept d'arbre (dans le secondaire), avec les mêmes types de résultats qu'au niveau supérieur quant à l'efficience des outils didactiques que nous avons élaborés, à l'implication des élèves dans l'activité et à leur capacité à prendre la responsabilité de rédiger des définitions (voir par exemple Ouvrier-Buffet, 2005).

II-8.3. Un cadre pour penser une progression pour une situation de « première rencontre » avec l'activité de définition

Le cadre de Gravemeijer (1999, 2002) permet d'organiser une progression (d'un niveau disons informel vers un niveau plus formel) pour une première activité de définition. L'apport de Zandieh & Rasmussen (2010), selon nous, réside dans l'intégration des notions de *concept image* et *concept definition* dans ce cadre : en effet, ces notions permettent de situer plus précisément les moments où une redéfinition est possible. Cela se prête particulièrement aux situations impliquant des concepts déjà familiers pour les étudiants (au moins en partie). Il s'agit alors d'une activité de redéfinition de concepts dans un cadre connu (exemple des triangles en géométrie plane), ou d'une activité de redéfinition de concepts dans un autre cadre (exemples des triangles en géométrie sphérique). Situer les interventions des *concept image* permet d'identifier des moments de (re)définition, plus précisément de *descriptive defining*, et nous pourrions rapprocher cela d'une « première rencontre » avec le processus de définition (il s'agira de concepts familiers pour les étudiants ou le devenant aisément via un travail sur leurs représentations). Ainsi, le cadre de Gravemeijer (1999, 2002), enrichi par la mise en œuvre des notions de *concept image* et *concept definition* Zandieh & Rasmussen (2010), peut permettre à un enseignant d'organiser une progression pour un ensemble de situations impliquant une activité de définition, mais pour des concepts familiers des étudiants. Il nous faudra revenir sur cette spécificité. Il nous apparaît que ce type de progression peut donner des pistes pour aménager une « première rencontre » avec l'activité de définition, mais ne peut constituer une situation fondamentale.

Le tableau suivant est proposé par Zandieh & Rasmussen (2010) :

Table 1
The defining as a mathematical activity framework.

Theoretical construct	Four levels of activity			
	Situational	Referential	General	Formal
Creating a concept definition	x	–	x	–
Using a concept definition	–	x	–	x
Creating a concept image	–	x	x	–
Using a concept image	x	–	–	x
Creating a new mathematical reality	–	x	x	–

Note: lowercase x indicates a high incidence of a construct in a given level of activity, whereas – indicates a relatively lower incidence.

Tableau 5 – Les notions de *concept image* et *concept definition* croisées avec les niveaux d'activité de Rasmussen (Zandieh & Rasmussen, 2010, p. 60)

Cela étant, l'étude du processus même de construction de définitions, processus pouvant apparaître dans les quatre niveaux de Gravemeijer (1999, 2002) reste à faire et demeure nécessaire. La modélisation d'une activité de définition doit donc intégrer cette dimension « gestion » de processus de définition.

Larsen & Zandieh (2008) ont par ailleurs valorisé l'utilisation du cadre de Lakatos (1976) et de ses heuristiques et ont proposé la méthode suivante pour concevoir des situations « à la Lakatos » (nous avons déjà abordé la complexité de cette tâche) : choisir un concept, identifier les résultats mathématiques fondamentaux impliquant ce concept, étudier les preuves qui pourraient permettre de générer le concept en question, évaluer ce qui pourrait constituer une conjecture primitive. Du côté de la gestion en classe cela signifie côté enseignant et/ou étudiants de favoriser l'émergence de contre-exemples, de gérer l'attention des étudiants sur la preuve, la conjecture, le(s) contre-exemple(s) mais aussi l'analyse de la preuve afin d'engager la construction d'un *proof-generated concept*, ce qui est loin d'être anodin, nous l'avons déjà dit, et cela requiert une modélisation appropriée.

II-8.4. Spécificités des concepts mathématiques utilisés dans des situations impliquant une activité de définition

II-8.4.1. Rappel des concepts utilisés dans les situations de définition

Nous faisons ici un résumé des concepts rencontrés dans les différentes situations impliquant une activité de définition. Nous analyserons ensuite les spécificités de ces concepts, notamment en interrogeant la dimension « familiarité avec les concepts » que nous avons rencontrée.

Mathématiques discrètes

- Concepts de nature combinatoire
    - Balacheff (1987), Nunokawa (1996) : géométrie combinatoire
    - Sriraman (2006) : étude de faits combinatoires
    - Fletcher (1964) : motifs et connexions
- Arbre (Ouvrier-Buffet, 2003)
- Droites discrètes (Ouvrier-Buffet, 2006)

Concepts géométriques

- plan/espace :
    - polyèdres (Yim, Song, & Kim, 2008) et Lakatos (1984)
    - convexité (Fletcher, 1964 ; Ouvrier-Buffet, 2005), quadrilatères (Freudenthal, 1973 ; De Villiers, 1998)

- géométrie sphérique : Larsen, Zandieh, Rasmussen
- géométrie discrète : Ouvrier-Buffet (2006), Borasi (1992)
- triangle de Penrose et preuve de son impossibilité (Koichu, 2012)

Analyse
- séries de Fibonacci (De Villiers, 2000)
- limite (Swinyard, 2011 ; Job, 2011[42])

Algèbre
- sous-groupe (Larsen, Zandieh, Rasmussen)
- générateur, minimalité – étude d'un cas discret (Ouvrier-Buffet, 2011)

Les concepts considérés, dans les expérimentations conduites, étaient :
- soit nouveaux (et peu enseignés dans les curricula actuels) mais accessibles et permettant de générer facilement un premier *concept image* ;
- soit déjà familiers des étudiants et revisités, éventuellement dans un autre cadre mathématique.

Il est important de préciser ici les différentes caractéristiques des concepts que nous pouvons considérer comme de « bons candidats » à une activité de définition. Ce sont des concepts :

- possédant plusieurs définitions équivalentes, définitions pouvant être formulées dans des systèmes de représentations symboliques différents ;
- dont l'accessibilité via des représentations et/ou l'exploration de problèmes est avérée ;
- appartenant à différents champs des mathématiques (c'est le cas des objets appartenant à différentes géométries) : il est vrai que la transposition des objets d'un champ à un autre implique une activité de définition, mais aussi de changement d'axiomatique, et donc nécessite une exploration du nouveau concept, parfois en s'affranchissant de connaissances antérieures afin d'avoir un regard neuf sur le concept ;
- pour lesquels il est aisé de générer des questionnements naturels (c'est le cas lors de l'exploration de problèmes combinatoires ou lors de l'essai de transposition d'une axiomatique géométrique au cas de la géométrie discrète par exemple) ;
- pour lesquels l'enseignant se retrouve dans la même position de chercheur que l'étudiant.

Les concepts issus des mathématiques discrètes impliqués dans des problèmes de combinatoire, d'arithmétique, de théorie des graphes, de géométrie discrète, de géométrie combinatoire, vérifient ces différentes conditions et se prêtent particulièrement à une activité de définition (cela a été démontré dans Ouvrier-Buffet, 2006 et 2011 notamment).

II-8.4.2. La question de la familiarité des concepts utilisés dans les situations de définition

Dans l'étude de l'activité de définition, la question de la familiarité des concepts est cruciale, mais comporte deux versants, presque antagonistes : la familiarité des concepts peut paraître nécessaire pour permettre une « première rencontre » avec l'activité de définition (mais cette notion de familiarité reste à préciser) ; et il est aussi nécessaire de proposer des concepts non

[42] Le travail de Job (2011) ne sera pas ici présenté, mais rappelons que son étude souligne en particulier que « (...) l'école insuffle aux élèves un rapport à la notion de limite qui va véritablement s'ériger en obstacle à l'acquisition de son caractère lakatosien. » (Job, 2011, p. 498). Une étude approfondie, dans cette direction du point de vue de la construction de la définition du concept de limite, sous l'éclairage non seulement des apports de Lakatos (et de l'obstacle lakatosien en soi) mais aussi des autres conceptions et moments présentés dans la présente note de synthèse, serait à explorer.

familiers afin que les étudiants n'attendent pas une définition pré-écrite dans un ouvrage ou donnée par l'enseignant.

« Pour » une familiarité des concepts. Nous avons déjà souligné l'importance de la « première rencontre » avec une activité de définition pour permettre aux étudiants de se construire un premier cadre de travail et donc d'accéder à la mise en œuvre d'un processus de définition. Pour atteindre un tel objectif, deux cas sont possibles : les concepts sont déjà connus ou partiellement connus des élèves (existence d'un *concept image* donc) ou ils sont facilement accessibles via leurs représentations et peuvent ainsi devenir rapidement familiers. Nous sommes ainsi toujours sur un travail de définition qui s'enclenchera à partir d'un *concept image* pré-existant ou construit via des représentations du concept en jeu. Les études existantes sur le sujet partent généralement d'un *concept definition* donné aux étudiants, étudiants qui vont ensuite reconstruire via des *concept image* une (ou plusieurs) définitions (voir par exemple Dahlberg & Housman, 1997). Peut alors également intervenir le *concept usage* proposé par Moore (1994)[43] et qui est présenté comme complémentaire aux concepts de *concept definition* et *concept image*, devenant ainsi un troisième élément dans un schème de compréhension de concept. Cette idée de *concept usage* n'est pas étrangère aux définitions-en-acte.

Pour rappeler les cadres explicités dans divers travaux, cela se situe du côté du *descriptive defining* de Freudenthal (1973) et du niveau de mathématisation horizontale de Treffers (1987). Soulignons que cette question de la familiarité a également été abordée par Durand-Guerrier (2010) et Boero & Douek (2008). Durand-Guerrier (2010) caractérise un milieu favorisant une démarche expérimentale comme devant :

> (...) comporter des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. (Durand-Guerrier, 2010, p. 1).

Durand-Guerrier (2010) rejoint aussi les domaines d'expérience[44] de Boero (voir par exemple Boero & Douek, 2008). Soulignons que l'étude des domaines d'expérience (DE) pour l'activité de définition se situerait en lien avec plusieurs pratiques (logiciens, épistémologues, philosophes, mathématiciens, linguistes etc.) et serait pertinente au niveau théorique afin de poursuivre notre travail. Notons également que la mise en place de DE en classe nécessite un temps long car il est nécessaire qu'une familiarité avec les concepts, mais aussi avec les problèmes et processus en jeu, se mette en place.

« Pour » des concepts non familiers. Giroud (2011) formule une telle hypothèse car, selon lui, impliquer des objets trop proches est au détriment d'une démarche expérimentale en mathématiques, démarche qu'il inscrit dans mobilisant le raisonnement plausible (au sens de Pólya), la construction de nouveaux objets et la formulation de nouveaux problèmes. Il recherche donc des problèmes dont les instances ne sont pas usuelles pour les élèves afin de favoriser une démarche expérimentale. Cela va dans le sens de Boesen et *al.* (2010) (cité par Giroud (2011)) qui montre que les étudiants (fin du secondaire, début de l'université) mobilisent des raisonnements fondés sur les propriétés mathématiques des objets en jeu et

[43] (the concept usage) « (...) refers to the ways one operates with a concept in generating or using examples or in doing proofs. » (Moore, 1994, p. 252).

[44] La théorie des domaines d'expérience s'inspire de la dialectique concepts scientifiques/concepts quotidiens de Vygotski. On considère un domaine de la culture, cohérent et homogène, « (...) reconnaissable par les pratiques qui se développent et se stabilisent dans une communauté donnée, les savoirs qui s'y établissent d'une façon plus ou moins institutionnalisée, les diverses représentations symboliques qui y sont en usage. (...) On appellera domaine d'expérience ces sphères d'activité socialement pérennes (...) » (Boero & Douek, 2008, p. 100).

créent de nouvelles démarches de résolution lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes éloignés de ceux fréquentés dans les manuels. À l'inverse, les raisonnements de ces mêmes étudiants sont du côté de leur expérience personnelle et très calqués de manière algorithmique sur des raisonnements déjà vus (et mémorisés) lorsque les problèmes recherchés sont proches de ceux des manuels.

En conclusion. Nous prêterons attention à la familiarité des concepts pour le moment de « première rencontre » avec l'activité de définition. Dans ce cas, l'accès à un concept par son (ou ses) *concept image* pourra se faire soit parce que les étudiants auront déjà rencontré le concept en jeu, soit parce que le concept présente une accessibilité notable par ses représentations (pour le cas de concepts peu institutionnalisés dans l'institution « enseignement » par exemple). Dans ce dernier cas, nous favoriserons les explorations expérimentales de ce concept, il s'agira en fait d'une familiarisation avec le concept. Sierpinska (1995) reprend à ce sujet le rôle des exemples :

> (...) les exemples sont, pour la compréhension des concepts abstraits, des déclencheurs indispensables et des obstacles nécessaires. On fait ses premières conjectures en les prenant comme base, mais lorsqu'on commence à tester celles-ci, ce sont les définitions qui jouent de plus en plus un rôle fondamental. (Sierpinska, 1995, p. 93)

Nous défendons donc le fait de retenir plus particulièrement des concepts non familiers des étudiants, et c'est là une hypothèse de recherche. En effet, si le concept est trop familier, l'activité de définition peut se trouver réduite du fait de la recherche de connaissances déjà visitées dans un cours antérieur, et ainsi la gestion de la situation en sera plus complexe (l'enseignant devra en effet « forcer » les étudiants à changer de point de vue). Si nous considérons maintenant des concepts familiers avec un changement de cadre (ce qui est le cas avec les triangles sphériques), conduire un travail de définition et d'axiomatique locale sur la sphère de manière endogène sera beaucoup plus profitable que d'essayer de transposer l'axiomatique euclidienne. En effet, un triangle sphérique est remarquablement différent d'un triangle dans le plan, il est donc nécessaire de sortir de la géométrie classiquement enseignée. Cela ne prive cependant pas l'étudiant de questionner la transposition de résultats et autres théorèmes connus à la géométrie sphérique.

Lorsqu'il ne s'agira pas d'une « première rencontre » avec l'activité de définition, la mise en place de la situation tendra tout d'abord à construire une familiarité des étudiants avec le concept (nous jouerons sur les instances du problème à cette fin). Il reste en effet important de favoriser l'exploration du problème avant tout travail de preuve et d'émission de conjectures.

II-8.5. Spécificités des situations impliquant une activité de définition

Dans les différents travaux rencontrés, les situations sont principalement de trois types d'intersection non vide :

- des situations de classification, pour délimiter un concept ;
- des situations impliquant un changement de cadre ;
- des situations « à la Lakatos », impliquant une preuve.

Dans le but d'enrichir la description des conceptions et des situations de définition, nous allons revenir maintenant sur la définition des problèmes.

III – Enrichissement et validation de la modélisation de l'activité de définition

III-1. Définition des problèmes

Dans le cadre de l'utilisation du modèle des conceptions de Balacheff (1995), la question de la définition des problèmes P du quadruplet (P, R, L, Σ) se pose ainsi :

> Nous appelons problèmes les perturbations du système. Le domaine de la validité de la conception, ou sphère de pratique, est constitué de l'ensemble des problèmes que la conception permet de résoudre et qui ne conduisent pas à une rupture de l'équilibre du [Sujet <> Milieu]. (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 80)

Cette définition correspond à un besoin de décrire les conceptions d'un sujet dans une situation particulière. Pour décrire les μ-conceptions, il est nécessaire de parvenir à rendre compte des problèmes identifiés comme tels par le savoir savant lui-même. Modeste[45] (2012, p. 57) a proposé une autre définition du terme « problème », adaptée à la description de μ-conceptions de l'algorithme. Giroud (2011) a utilisé le même mode de définition pour introduire la notion de « concept-problème »[46] et décrire la démarche expérimentale en mathématiques. Tous deux ont exploité et montré l'efficacité du développement du concept de « problèmes » issu de la théorie de la complexité (Garey & Johnson, 1979). Cette définition de « problèmes » est certes liée aux notions algorithmiques d'entrée et de sortie, mais elle présente l'avantage de formaliser un problème mathématique indépendamment du sujet et du milieu, et ainsi d'accéder à une définition de problèmes pour les μ-conceptions qui nous intéressent dans le cadre de l'exploration épistémologique de l'activité de définition. Il s'est avéré que la définition de « problèmes » de Garey & Johnson (1979) nous a permis dans un premier temps de nous affranchir du sujet et du milieu pour déterminer les couples (I, Q) possibles, et a ouvert dans un second temps l'exploration des types de problèmes envisageables au niveau didactique, en réintroduisant les interactions [Sujet <> Milieu].

Un problème, dans la théorie de la complexité algorithmique, peut être décrit ainsi :

> For our purposes, a problem will be a general question to be answered, usually possessing several parameters, or free variables, whose values are left unspecified. A problem is described by giving: (1) a general description of all its parameters, and (2) a statement of what properties the answer, or solution, is required to satisfy. An instance of a problem is obtained by specifying particular values for all the problems parameters. (Garey & Johnson, 1979, p. 4)

Nous allons donc adopter la définition de problème qui suit reprenant l'ensemble des instances et l'ensemble des questions. Un problème est défini comme un couple (I, Q) : l'ensemble des instances du problème (I) peut être décrit par plusieurs paramètres et la (ou les) question(s) (Q) porte(nt) sur ces instances (spécifiant les propriétés de la solution attendue). Fixer une instance du problème, c'est instancier le problème. Réduire l'ensemble de définitions des instances permet de considérer les sous-problèmes de (I, Q).

Giroud (2011) a également introduit la notion d'espace-problème (ou champs de problèmes) afin d'étudier l'ensemble des problèmes connectés à un problème donné et les liens qu'ils entretiennent. C'est un aspect particulièrement crucial qui nous a permis d'enrichir l'un des opérateurs lakatosiens « $\mathbf{R}_5^{\mathbf{L}}$: formuler de nouveaux problèmes » et de prendre en charge une

[45] Modeste (2012) a été le premier à travailler sur une utilisation des μ-conceptions. Il l'a croisée avec la dialectique outil-objet de Douady (1986).

[46] Deux grandes classes de problèmes sont pointées : les problèmes d'existence (Giroud (2011) parle d'*expérience validative*) et les problèmes de recherche de solutions (*expérience générative*).

partie de l'explicitation de la dialectique preuve-définition. Cet opérateur $\mathbf{R}_5^{\mathbf{L}}$ peut ainsi comprendre les sous-opérateurs suivants :

- formuler un lemme (déjà présent chez Lakatos, mais non encore intégré à notre modélisation) ;
- formuler une nouvelle conjecture ; questionner la généralisation d'une conjecture ;
- mettre en place un plan de preuve ;
- structurer une stratégie (de preuve ou de définition ou de recherche d'algorithme ou autre), interroger sa validité et sa généralisation ;
- formuler des sous-problèmes : il s'agit en particulier de l'étude de cas particuliers et de la question de la généralisation des résultats alors obtenus par une telle étude ;
- formuler un problème plus général ;
- formuler le problème dual (et formuler le concept dual) ;
- questionner la validation de faits expérimentaux ;
- générer des exemples et/ou des contre-exemples (recherche d'un processus pour une génération systématisée) ;
- interroger la validité de la preuve (présent chez Lakatos dans la phase de critique de la preuve-analytique) ;
- problématiser d'autres preuves.

Nous allons conduire une étude spécifique des problèmes impliquant une activité de définition dans le paragraphe III-4.

Lien avec les « variables de recherche ». Giroud (2011, p. 36s) met en lien la définition de problèmes avec les « variables de recherche » afin d'insister sur ce qui est à la disposition des étudiants, c'est-à-dire comment ceux-ci peuvent agir sur les instances et sur la (ou les) question(s). Dans le cadre de l'étude des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC), Grenier & Payan (2003) considère que les invariants de telles situations sont représentés par un triplet (Question, Conjecture, Preuve). Les variables didactiques associées sont des « variables de recherche » :

> (...) au sens où elles déterminent la compréhension et l'intérêt de la question, son ouverture à de nouvelles questions, l'élargissement des stratégies de recherche, les possibilités de transformation du problème (modélisation). (Grenier & Payan, 2003, p. 195).

Ces variables de recherche sont aussi des variables du problème mathématique, à la disposition des étudiants. Elles sont ainsi également un outil que l'enseignant peut utiliser. Ce qui implique que l'enseignant soit à même de déterminer les variables de recherche du problème qui portent sur les instances (cela permettra ici de générer une étude de cas particuliers par exemple, ou de changer la représentation du problème) ou sur les questions.

III-2. La notion d'axiomatique locale

L'articulation entre l'acte de définir et l'axiomatisation nous est rappelée par Granger (2003) :

> En mathématiques, par exemple, définir un objet consiste bien essentiellement à l'introduire explicitement dans un système opératoire, que ce soit en donnant une procédure de construction, ou que ce soit en formulant des énoncés et des règles où entre le nom de l'objet à définir. En ce dernier cas, qui est celui de l'axiomatisation, l'objet se trouve médiatement défini, en ce sens que l'on a les moyens de manipuler et combiner tous les énoncés bien construits où entre son nom. (...) Par où l'on voit que l'acte de définir ne s'exprime pas nécessairement ici sous la forme prédicative, ou plutôt même que cette forme prédicative n'est alors qu'illusoire, masquant la fonction véritable de la définition sous une apparence descriptive. (Granger, 2003, p. 195)

Nous allons nous appuyer sur les travaux de Durand-Guerrier (2005, 2010) et Giroud (2011) afin de préciser un cadre pour appréhender une axiomatique qui sera « locale » dans une démarche de recherche et une activité de définition. Durand-Guerrier (2010) définit la dimension expérimentale en mathématiques de la façon suivante :

> Ce qui caractérise la dimension expérimentale en mathématiques, c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets. (Durand-Guerrier, 2010, p. 1).

Durand-Guerrier (2005) définit une théorie locale comme un ensemble « qui comporte les définitions, les énoncés théoriques assumés (axiomes), et certaines propositions considérées comme vraies, découlant ou non des axiomes. » (Durand-Guerrier, 2005, p. 19). Cette dimension « construction d'une théorie locale » doit être intégrée dans la modélisation du processus de définition. Nous plaçons ainsi deux nouveaux opérateurs dans la conception poppérienne (Lakatos évacue la question générale de l'axiomatique, d'où notre choix) :

- $\mathbf{R}_4^{\mathbf{P}}$: la construction d'une axiomatique locale (composée de définitions, axiomes, propositions)
- et $\mathbf{R}_{\mathbf{4bis}}^{\mathbf{P}}$: la mise à l'épreuve d'une axiomatique locale.

Le second opérateur peut avoir le statut de contrôle. Ces deux opérateurs peuvent, par exemple, être à l'œuvre dans les situations impliquant un processus de définition d'objets géométriques sur la sphère ou sur une grille discrète (cf. Ouvrier-Buffet, 2006).

III-3. Retour sur la dimension épistémologique : entretiens avec les mathématiciens sur l'activité de définition

Lakatos se réfère explicitement au travail des mathématiciens, d'où l'intérêt de valider/invalider et compléter son modèle, ainsi que notre modélisation par des entretiens avec des mathématiciens. De plus, Lakatos ayant pris des libertés quant à la reconstruction historique des concepts qu'il propose et s'étant attaché à étudier des concepts antérieurs au XX$^{\text{ème}}$ siècle, il est nécessaire d'aller interroger une pratique contemporaine des mathématiques, dans différentes branches des mathématiques.

III-3.1. Les travaux existants sur les pratiques des mathématiciens : l'activité de définition encore inexplorée

Certains chercheurs en didactique se sont penchés sur la caractérisation d'heuristiques et de comportement de mathématiciens (e.g. Burton, 2004 ; Carlson & Bloom, 2005 ; Schoenfeld, 1985). Peu d'éléments cependant concernent l'importance de l'activité de définition, sauf quand celle-ci s'inscrit dans un lien direct avec la preuve. Il est généralement admis qu'une preuve peut soulever la nécessité d'une « meilleure » définition, l'une des fonctions de la preuve étant ici l'exploration du sens d'une définition (en l'impliquant dans la rédaction d'une preuve) et/ou l'étude des implications d'une assertion (Hanna, 2000). C'est effectivement une voie à explorer dans l'enseignement pour appréhender la compréhension que les étudiants ont des définitions qui leur sont enseignées, tout comme le sont les situations permettant un enrichissement des *concepts images* des étudiants (Tall, 1991 ; Vinner, 1991). Mais cela ne prend pas en compte ce qui se trouve en amont, c'est-à-dire l'activité même de recherche mathématique où co-émergent définitions et preuves, à l'image du processus continuel de révision conceptuelle de Lakatos (1961, 1976). Conduire des entretiens et expérimentations avec des chercheurs en mathématiques appartenant à différents champs des mathématiques (nous pouvons en effet faire l'hypothèse d'une dépendance de l'activité mathématique aux concepts Mathématiques) est ce qui nous intéresse ici. La question sous-jacente est de déterminer s'il existe une façon de « penser » (concevoir, juger) les définitions, transversale aux mathématiques. Les entretiens avec les chercheurs explorent en particulier certains des

éléments dégagés par Peirce (1995)[47] tels l'expression diagrammatique (centrée sur les relations et non sur les mots), l'observation, l'expérimentation, l'habituation, mais pas seulement.
Il s'agit d'approfondir et de situer l'activité de définition dans l'activité mathématique et les liens qu'elle entretient avec la preuve (en caractérisant les types de situations propices à ce mode de raisonnement et les invariants de cette activité) et, d'une certaine façon, de mettre à l'épreuve le modèle épistémologique de Lakatos.

Une étude de la preuve toujours prédominante. Notre étude s'inscrit dans un mouvement relativement récent d'étude des pratiques des mathématiciens, où l'étude de la preuve est centrale. Rav (1999, p. 20) soulignait déjà que ce sont les preuves et non les théorèmes qui sont les porteurs de la connaissance mathématique. Hanna & Barbeau (2008) étendent cela en disant que les preuves peuvent aussi introduire de nouvelles méthodes, des outils et des stratégies pour appréhender de nouveaux problèmes. Et justement, lors d'entretiens avec des mathématiciens, Weber (2011) montre que les mathématiciens lisent les preuves de collègues pour :

- transposer des idées et des techniques à leur propre recherche ;
- comprendre la preuve ;
- utiliser des exemples pour comprendre et s'abstraire du niveau formel logico-déductif.

Wilkerson-Jerde & Wilensky (2011) analysent le raisonnement de mathématiciens et d'étudiants face à une preuve non familière (en géométrie topologique). On y retrouve la mobilisation de connaissances issues de l'expérience des participants, mais aussi : des générations d'exemples, des décompositions d'un concept ou d'une idée en éléments plus petits permettant ainsi une manipulation et une exploration d'éléments composant le concept, des tests et exploration de définitions, ainsi que des essais pour connecter des définitions.

Watson, Mason et différents collègues ont exploré le rôle spécifique des exemples, en particulier ceux générés par les apprenants pour illustrer les propriétés génériques d'idées mathématiques et appréhender de nouveaux concepts. Actuellement ils considèrent et analysent la génération et l'utilisation des exemples dans un processus de preuve (Watson & Mason, 2002 ; Sandefur et *al*., (2013)).

Shriki (2010) aborde la question du développement de la connaissance par la créativité et propose une expérimentation avec des enseignants de mathématiques où ils (re)définissent des concepts géométriques. On retrouve un processus de génération de concepts géométriques proche de celui décrit dans les travaux de Larsen, Zandieh et Rasmussen, décrit de manière linéaire, où émerge une activité de définitions. Le focus sur la créativité met en évidence le fait que les enseignants projettent de proposer ensuite des activités à leurs élèves montrant que les mathématiques peuvent être une (re)construction.

Plus récemment, Gardes (2013) propose de modéliser la notion de « geste » pour analyser les pratiques des mathématiciens, et ainsi, en conséquence didactique, d'étudiants ; la conjecture d'Erdös-Straus est le problème mathématique considéré. Elle construit une nouvelle définition de la notion de « geste », en prenant appui sur les travaux de Cavaillès et de Châtelet & Longo. Des marqueurs pour baliser l'avancée dans la résolution d'un problème sont ainsi pointés, tout comme les gestes de nature combinatoire et opératoire, ces derniers permettant une relecture de la catégorisation syntaxe / sémantique. La dimension pragmatique est effectivement prise en compte par l'action située au cœur des processus. Sept gestes

[47] Il y a trois sortes d'exercices qui semblent particulièrement appropriés à renforcer les facultés de l'habituation. Exercices de division et de classification, exercices de définition et d'analyse logique des idées, exercices de résumés de théories, des grandes lignes d'un raisonnement. (Peirce, 1995, p. 254).

particuliers sont alors définis dans le traitement par des mathématiciens de la conjecture d'Erdös-Straus et permettent une analyse effective de travaux d'étudiants. Les travaux de Gardes (2013) ouvrent clairement de nouvelles pistes de recherche en épistémologie contemporaine.

Un aperçu de la recherche en mathématiques. Bouleau (1997) a réuni dans un ouvrage plusieurs dialogues avec des mathématiciens. Il ressort, pour ce qui nous concerne, de la pratique de ces mathématiciens, les éléments suivants (les champs des mathématiques concernés sont indiqués entre parenthèse, ainsi que les noms des mathématiciens) que nous pouvons facilement mettre en lien avec les opérateurs et contrôles déjà identifiés, ainsi que les types de problèmes.

- Les objectifs de la recherche : rechercher des résultats nouveaux et ainsi étendre le corpus des connaissances (Denis Feyel et David Nualart), accéder à une meilleure compréhension d'un problème ou d'une approche (David Nualart), retravailler des concepts et problèmes voire théories pour accéder à une meilleure compréhension, et enfin dégager des idées, mais aussi des méthodes et de nouveaux angles d'attaque des problèmes (Gabriel Mokobodski).
- L'importance des changements de cadre : nous la retrouvons particulièrement explicitée dans les propos de Paul Malliavin (probabilités), qui souligne les connexions souhaitables entre différentes interprétations et la nécessité de changer de domaine c'est-à-dire de transposer ses connaissances d'un endroit à un autre. Dans sa pratique, il insiste sur l'importance de la pensée géométrique. D'ailleurs, la géométrisation des situations mathématiques est une méthode défendue par Gustave Choquet (géométrie, mesure), présenté comme un véritable introducteur de concepts.
- La recherche en elle-même : la recherche est en zigzag, ce que ne montrent pas les écrits. Laurent Schwartz (analyse) prône des publications de travaux inachevés, partiellement résolus. La phase d'axiomatisation est abordée par Denis Feyel qui distingue deux sortes d'axiomatisation : la première intervient pour remettre de l'ordre après une crise, et la seconde, dite mineure, ne changera rien à la compréhension des choses.

III-3.2. L'activité de définition selon des mathématiciens contemporains – premiers résultats

III-3.2.1. Le dispositif et le recueil de données

Nous avons orienté les entretiens semi-dirigés (enregistrés et retranscrits) autour de quatre pôles :

- Une meilleure connaissance des mathématiciens interrogés, via des questions concernant leur parcours et leur choix (ou non-choix) de domaine de prédilection en mathématiques.
- Leur pratique des mathématiques, via les questions suivantes :
    - Quand vous cherchez en mathématiques, pouvez-vous expliquer sur quoi se fondent vos choix (choix de problèmes, de preuves, de définitions, d'axiomes ...), ce qui les oriente le plus ?
    - À quoi reconnaissez-vous un problème ? une question (de recherche) ? une création mathématique ? un résultat ?
    - (et à la fin de l'entretien) Quand on est chercheur depuis longtemps, peut-on dire que le rapport à l'activité de définition, à la preuve, est modifié ? Si oui, comment ?
- Leur pratique des définitions et de la dialectique entre preuve et définitions :
    - À quoi reconnaissez-vous une définition ? une preuve ?

    - Quand construisez-vous des définitions ? ou : dans votre pratique, à quel(s) moment(s) avez-vous une activité de définition ?
    - Pour quoi faire ? ou : quelles sont les raisons de cette construction de définitions ?
    - Pour vous, existe-t-il différents types de définitions ? Si oui, lesquels ? Répondent-ils à des besoins ou problèmes particuliers ? Si non, à quoi vous sert une définition dans votre pratique ?
    - D'où vient la validation d'une définition ?
    - Quels liens y a-t-il, dans votre pratique des mathématiques, entre « définitions » et « preuve » ?
- Une question en lien avec leurs enseignements : Faites-vous ou seriez-vous prêt(e) à implémenter des situations de construction de définition dans vos enseignements ?

En cas de « blocage » de la discussion, nous avions prévu trois situations pour les soumettre à analyse et débat (nous n'en avons pas eu besoin, mais les avons utilisées dans la discussion) :
- Voici quelques exemples de situations : quel(s) type d'activité est/sont en jeu ? (autres questions possibles : Quels questionnements vous viennent ? Champ mathématique ? Quels outils mathématiques ? Type de solutions ? Quelles perspectives ?)
    - Une situation de classification (avec comme question sous-jacente : finalement, n'y a-t-il pas que des situations de classification en mathématiques ?)
    - Une situation du type « déplacements sur la grille »[48] (cf. Ouvrier-Buffet, 2011)
    - Une situation du type : « Définir la mesure de la complexité d'un graphe. L'essayer sur plusieurs exemples et prouver quelques propriétés de la mesure. »

Nous avons conduit à ce jour huit entretiens, d'autres sont programmés afin de compléter les champs des mathématiques représentées. Un tableau synthétique des profils des chercheurs figure en Annexe 5.

III-3.2.2. L'analyse des données

L'analyse des retranscriptions a été réalisée suivant six axes, avec pour objectifs de valider et compléter la modélisation des conceptions, mais aussi d'enrichir cette modélisation au-delà de la caractérisation des conceptions et problèmes (sous réserve de considérer l'ensemble des mathématiciens interrogés comme suffisant pour finaliser notre modélisation) :
- les différents types de définition explicités par les chercheurs (pour les confronter avec les conceptions) ;
- les caractéristiques de leur activité de définition (nous recherchons des opérateurs, mais aussi la dialectique preuve-définition) ;
- les raisons qui font évoluer une définition (nous recherchons là encore des opérateurs) ;
- les éléments qui permettent la validation d'une définition (nous sommes là au niveau des structures de contrôle) ;

[48] Soit G une grille discrète (on peut prendre par exemple un maillage carré). Un point de G est un point à l'intersection de deux droites du maillage. Un déplacement sur G est défini par deux entiers positifs et deux directions (haut, bas, gauche, et droite). Par exemple, « 2 carrés à droite et 3 carrés en bas » est un déplacement.
Problème : soit $E_k = \{d_1, \dots, d_k\}$ un ensemble de k déplacements d_i, $k \geq 1$ et $1 \leq i \leq k$. Partant d'un point de la grille, n'importe lequel, quels points de la grille peut-on atteindre en utilisant des combinaisons entières positives de E_k ?

- leur vision de l'activité de définition dans l'enseignement ;
- l'identification (si possible) de différents moments de l'activité de définition, afin de compléter la modélisation par les conceptions, qui, nous l'avons vu, n'intègre pas le niveau « en-acte ». Ce point fera l'objet d'une présentation séparée dans la partie III-4.

III-3.2.3. Résultats et ouvertures

Différents types de définition ? Les chercheurs interrogés identifient effectivement différents types de définition (que nous pouvons rapprocher surtout des zéro-définitions, qui sont des définitions de travail). Il s'agit :
- Des définitions qui restent et qui appartiendront au domaine public, ou, plus fréquemment des définitions locales, d'objets intermédiaires (destinées à un groupe de personnes, pour raccourcir le discours). D'après les chercheurs, il existe une pyramide dans la recherche mathématique : il est plutôt rare de construire des nouveaux concepts qui auront un avenir pérenne. Une remarque cependant sur la fausse modestie des chercheurs qui disent ne pas définir de nouveaux concepts pour la postérité : il s'agit vraisemblablement d'un point de vue idéologique, les « grands » mathématiciens paraissant inatteignables. D'ailleurs, la construction de définitions est reconnue unanimement comme fréquente, même lorsque le concept défini n'a qu'une portée locale ou une durée de vie « indéfinie » (ce qui est le cas lorsque la portée du nouveau concept défini sera révélée ultérieurement, notamment dans la résolution de nouveaux problèmes de recherche dans un cadre identique ou lors d'un changement de cadre).
- Les définitions que l'on connaît à l'avance et celles que l'on déduit de résultats.
- Les définitions à l'essai (on part de l'intuition des objets et de ce que l'on veut en faire) qui commandent en quelque sorte la façon dont on cherche : elles sont là pour travailler sur des objets, et les définitions qui seront rédigées et qui auront un aspect esthétique (formel).

L'activité de définition et sa dialectique avec la preuve. Il ressort clairement que les définitions formalisées viennent « après » dans la construction, mais aussi une difficulté à déterminer un moment précis de l'activité mathématique et ses caractéristiques. La construction de théorie s'oppose à la résolution de problèmes : des personnes différentes sont concernées et cela porte sur des moments de l'activité mathématique différents.
Plus précisément sur l'activité de définition, selon les chercheurs, la preuve commande, et les définitions évoluent. Il s'agit de définir pour plusieurs raisons : accéder à une meilleure compréhension, simplifier, généraliser des concepts, explorer d'autres domaines (d'autres cadres et structures connexes), communiquer. Les chercheurs ne développent pas spécialement des éléments de la conception aristotélicienne tels que les critères de non-redondance, minimalité etc. dans la mesure où ils se situent exclusivement dans l'activité mathématique (comme cela est induit par les questions de l'entretien). De même, les éléments relatifs à une construction de théorie, tels ceux de la conception poppérienne sont peu présents.
La définition, et même la redéfinition, d'objets intervient dans la preuve, pour pouvoir continuer la recherche, dans un premier temps, puis pour délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée ou d'une preuve, dans un second temps, et enfin pour étudier ensuite des cas plus généraux ou au contraire plus particuliers. Il est important de souligner que les chercheurs définissent toujours à partir d'une intuition des objets et des résultats, ce qui implique déjà une certaine familiarité avec les objets et problèmes. Dans certains cas, la définition d'un nouveau concept (complètement nouveau) apparaîtra lors de l'activité de preuve, et pourra avoir un caractère local ou global (la portée du nouveau concept ne pourra être révélée que lors de résolutions ultérieures, sur un temps long donc).

Pourquoi une définition évolue ? Reprenant l'aspect « communication », les chercheurs indiquent qu'une définition va évoluer lorsqu'il sera question de transmettre des résultats (dans différentes institutions donc les impacts se situeront à un niveau local ou à un niveau plus formalisé – cela peut être un séminaire, une publication, ou même un ouvrage d'enseignement). Le rôle des exemples et contre-exemples est évoqué et décrit comme difficile, et peu fréquent, surtout pour les contre-exemples (des exemples et contre-exemples « déjà construits » pourront être utilisés). On peut souligner une différence suivant les champs mathématiques concernés où les champs concrets et/ou discrets apparaissent comme plus favorables à l'utilisation et à la génération d'exemples et contre-exemples. L'exhaustivité des cas possibles est aussi recherchée. Les problèmes qui permettent de faire évoluer une définition sont essentiellement : poser la question de la généralité du problème, poser la question des analogies. En cas de blocage, construire la définition du dual peut permettre de faire évoluer la situation et ensuite d'effectuer un retour au problème initial (et donc d'impacter la définition en cours de construction, mais aussi de générer de nouveaux problèmes.

La validation d'une définition. Celle-ci s'effectue à différents niveaux : auto-validation, par les collègues, par la communauté. Le fait que la preuve fonctionne est un élément de validation, de même que si la conjecture est « presque démontrée » ou s'il n'y a plus de contre-exemples, « dans les cas les plus intéressants ». On retrouve aussi le contrôle de la validité d'une assertion par des essais sur des exemples déjà évoqué par Arnold (1998). Enfin, une définition est validée lorsqu'elle présente une bonne résistance aux transformations naturelles ou à un changement de cadre. Cela étant, un chercheur souligne qu'il y a des cas où on ne peut pas valider, on ne sait pas si le travail de recherche est réellement terminé, ce qui rejoint la conception lakatosienne. Nous retrouvons ici, et cela est normal, les éléments décrits par Weber (2008) permettant la validation de la preuve (par des mathématiciens), à savoir, en particulier, le fait d'utiliser un exemple pour (re)construire une preuve générique, la validation par un seul exemple, le fait de ne pas trouver de contre-exemple, la recherche de régularités dans des catégories d'exemples (cela converge également vers les phases de Boero (1999).

L'activité de définition dans l'enseignement, au niveau du supérieur. Il ressort que les chercheurs pensent que cela peut avoir un intérêt de faire vivre de telles activités à des étudiants, mais ne parviennent pas à concevoir la forme que cela pourrait prendre, d'autant plus que cela nécessiterait un temps long. Tous sont intéressés par la suite des recherches dans le domaine.

III-4. Une modélisation pour décrire et analyser l'activité de définition

Cette modélisation comprend quatre éléments distincts.

- Le premier concerne les trois conceptions épistémologiques de l'activité de définition, enrichies et validées par les travaux en didactique présentés ici et les entretiens avec les mathématiciens. Les conceptions sont présentées sous forme de tableaux, avec le modèle cK¢.
- Le deuxième élément est une meilleure définition des problèmes, présentée séparément.
- Nous y ajoutons un troisième élément qui s'attache à décrire quatre moments de travail sur la définition (issu des entretiens avec les mathématiciens) : cette composante intègre en particulier le niveau « en-acte » qui n'est pas présent dans la modélisation via les conceptions mais où certains opérateurs et contrôles peuvent déjà intervenir. Ces moments ne sont pas hiérarchiques mais coexistent et interagissent. Ils

sont éclairés par les conceptions et montrent que celles-ci s'articulent et coexistent dans l'activité de définition.
- Le quatrième et dernier élément est une méthodologie pour concevoir et analyser des situations impliquant une activité de définition.

III-4.1. Trois conceptions revisitées

III-4.1.1. Conception Aristotélicienne

Problèmes (P) : Classification (l'exemple de la géométrie est donné), et plus généralement : tout problème où une délimitation (au sein d'un même *genre* par exemple) est possible. **Systèmes de représentation (L) :** - Langage et règles du discours - Logique (NB : l'importance de la représentation des concepts (et donc des systèmes de représentation propres à chaque concept) n'est pas présente chez Aristote mais découle de la conception aristotélicienne.)	
Opérateurs (R)	**Contrôles (∑)**
$\mathbf{R_1^A}$: procéder par *genre et différences spécifiques* (cela revient à rechercher des invariants au sein d'une classe). $\mathbf{R_2^A}$: supprimer toute redondance. $\mathbf{R_3^A}$: supprimer toute régression à l'infini. $\mathbf{R_4^A}$: prouver l'équivalence entre définitions. $\mathbf{R_5^A}$: formuler une définition esthétique (simple quant au langage).	- **Pôle « Logique »** : proscrire les cercles vicieux, les termes antérieurs doivent être définis. Une définition est une condition nécessaire et suffisante. L'unicité du concept défini doit être vérifiée. - **Pôle « Langage et logique »** : proscrire les redondances et régressions à l'infini (d'où l'existence de termes primitifs) ; pas de métaphores ni homonymes. - **Pôle « Essentialisme »** : interroger l'existence des concepts définis.

Tableau 6 – Conception Aristotélicienne

III-4.1.2. Conception Poppérienne

Problèmes (P) : choix entre théories concurrentes **Systèmes de représentation (L) :** relatifs aux théories et concepts en jeu	
Opérateurs (R)	**Contrôles (∑)**
$\mathbf{R_1^P}$: génération de contre-exemples (processus de réfutations). $\mathbf{R_2^P}$: ne rien dériver d'une définition car une définition est un raccourci de langage. $\mathbf{R_3^P}$: réduire le nombre de postulats et voir si la théorie explique davantage de choses au regard de telle ou telle définition. $\mathbf{R_4^P}$: construire une axiomatique locale (composée de définitions,	- **Pôle « heuristique »** : Résistance aux réfutations - **Pôle « théorique »** : « Une théorie t_2 dépasse une théorie t_1 lorsque : 1) t_2 formule des assertions plus précises que ne le fait t_1, et celles-ci résistent à des tests plus précis. 2) t_2 prend en compte et explique davantage de faits que t_1. 3) t_2 décrit ou explique les faits de manière plus détaillée que t_1. 4) t_2 a subi avec succès des tests où t_1 avait échoué. 5) t_2 a permis de nouveaux tests expérimentaux qui n'avaient pas été envisagés avant que cette théorie n'ait été conçue, et a subi ces tests avec succès. 6) t_2 a permis d'unifier ou de relier divers problèmes qui étaient jusque-là sans rapport. » (Popper, 1985, p. 344) - **Pôle « méta »** : Contrôle appelé « savoir métascientifique »

axiomes, propositions) $\mathbf{R}^{\mathbf{P}}_{\mathbf{4bis}}$: mettre à l'épreuve une axiomatique locale.	par Popper : « Celui-ci est visiblement de nature intuitive, et prétend que nous savons ce que doit être une bonne théorie scientifique, avant même qu'on ait procédé à des tests. » (Popper, 1985, p. 322).

Tableau 7 – Conception Poppérienne (enrichie)

III-4.1.3. Conception Lakatosienne

<table>
<tr><td colspan="2">Problèmes (P) : - Problèmes intramathématiques (recherche du domaine de validité d'une conjecture, détermination de la validité d'une preuve)
- Classification

Systèmes de représentations (L) : - Représentations du (ou des) concept(s) mathématique(s) en jeu
- Systèmes de représentation interne aux mathématiques
- Systèmes de représentation en jeu lors d'un changement de cadre (il peut s'agir d'un changement de représentation symbolique)</td></tr>
<tr><th>Opérateurs (R)</th><th>Contrôles (∑)</th></tr>
<tr><td>$\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{1}}$: générer des exemples et contre-exemples (conséquences sur la définition produite)

$\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{1.1}}$: exclure de la définition une classe d'objets contenant les contre-exemples (monster-barring).

$\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{1.2}}$: exclure de la définition une classe d'objets qui est la classe des contre-exemples (exception-barring).

$\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{1.3}}$: réinterpréter les termes de la définition pour que les contre-exemples n'en soient plus (monster-adjustement).

$\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{1.4}}$: défendre la définition en l'étendant (en incluant une nouvelle classe d'objets) - généraliser la conjecture (monster-including).

$\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{2}}$: rédiger une zéro-définition.

$\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{3}}$: utiliser une définition dans une preuve (mise à l'épreuve de la définition, retour sur la nature des contre-exemples).

$\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{4}}$: changer de cadre.

$\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{5}}$: formuler un nouveau problème. Cet opérateur est très vaste et peut comprendre :
- générer des exemples et/ou des contre-exemples (recherche d'un processus pour une génération systématisée) ;
- questionner la validation et la portée de faits expérimentaux ; étudier des cas limites ;
- formuler un lemme ;
- formuler une nouvelle conjecture, interroger sa validité et sa généralisation (voir ci-dessous);
- structurer une stratégie (de preuve ou de définition ou de recherche d'algorithme ou autre), interroger sa validité et sa généralisation ;
- structurer un plan de preuve ;
- formuler des sous-problèmes : il s'agit en particulier de l'étude de cas particuliers et de la question de la généralisation des résultats alors obtenus par une telle étude ;</td><td>- Pôle « heuristique » : Contrôle de la validité d'une assertion par des exemples. Contrôles par interaction avec des pairs.

- Pôle « preuve » : notion de proof-generated definitions (contrôles issus de la dialectique preuve-définition), liée à un changement de cadre ou non (il peut s'agir d'une validation de la zéro-définition, mais aussi de l'émergence d'un concept via un lemme caché).

- Pôle « philosophique et logique » : voir la conception aristotélicienne.

- Pôle « axiomatique » : voir la conception poppérienne car le niveau axiomatique est en dehors du cadre explicite de Lakatos.

- Pôle « structurel » : contrôles relatifs à un changement de cadre (insuffisamment explicité et étudié chez Lakatos, mais découlant de $\mathbf{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{4}}$).

- NB : il n'y a pas de critère de fin explicite du processus de P&R, donc pas de contrôle de fin.</td></tr>
</table>

- formuler un problème plus général ; - formuler le problème dual (et définir le dual du concept en jeu) ; - interroger la validité de la preuve ; - problématiser d'autres preuves. $\mathbf{R_6^L}$: formuler une *proof-generated definition* (lemmes cachés).	

Tableau 8 – Conception Lakatosienne (enrichie)

Rappelons ici, pour compléter le tableau ci-dessus, les différents types de conjectures décrits par Reid (2002) et complétés par Cañadas et *al*. (2007) qui interviennent comme sous-opérateur de $\mathbf{R_5^L}$.

- Type 1 : conjecturer par induction empirique à partir d'un nombre fini de cas discrets
- Type 2 : conjecturer par induction empirique à partir de cas dynamiques
- Type 3 : conjecturer en procédant par analogie
- Type 4 : conjecturer en procédant par abduction
- Type 5 : conjecturer à partir d'un élément perceptif.

Dans la conception lakatosienne, nous retrouvons également les éléments décrits par Boero (1999), contextualisés à l'activité de définition (par exemple, la « formulation d'un énoncé » évoquée par Boero (1999) se traduit ici par la formulation de zéro-définition ou de *proof-generated definition*. Remarquons également que l'opérateur $\mathbf{R_5^L}$ peut être en fait un critère de fin local et agir en tant que contrôle, celui-ci se formulant de la façon suivante : formuler un nouveau problème de recherche marque la fin d'un processus.

Par ailleurs, l'opérateur $\mathbf{R_4^L}$ concernant le changement de cadre implique un vaste champ de questions. En effet, un changement de cadre peut impliquer une modélisation et la construction de nouvelles représentations, un questionnement relatif aux problèmes formulés dans deux cadres différents (sont-ils équivalents ou non ?). Ce processus génère lui-même de nouveaux objets et de nouvelles relations, voire même la généralisation du problème initial.

III-4.2. Quatre moments de travail présents dans l'activité de définition : une représentation de l'activité mathématique

Quatre moments de la recherche mathématique pour considérer l'activité de définition. Nous présentons ici, au vu des entretiens avec les mathématiciens et des travaux existants, quatre moments de l'activité de définition. Ces moments n'ont pas pour vocation d'être hiérarchisés et ne présentent pas une activité linéaire. Ils sont en interrelation. Nous allons les mettre en regard de la fonction des définitions et des conceptions. L'objectif de la définition de ces moments est de mettre en relation les conceptions et leur opérationnalité, les types de problèmes (de manière globale) liés à l'activité mathématique de recherche, et ainsi de donner un panorama de l'activité de définition dans la recherche mathématique. La dénomination que nous avons retenue pour ces moments est en relation avec les différents types de définition : définitions-en-acte, zéro-définitions, *proof-generated definitions*, et définitions théoriques (ce dernier terme s'inscrit dans la construction axiomatique d'une théorie, locale ou plus globale). Les conceptions peuvent intervenir dans différents moments de l'activité mathématique présentée, et sont indiquées sur la figure de synthèse, montrant ainsi leur complémentarité. Cette vision a pour vocation de donner une image dynamique et globale de l'activité de définition (voir Figure 4 ci-après). Dans la Figure 4, les flèches marquent un mouvement et plus particulièrement les relations entre les différents moments (les pointillés marquent des connexions possibles mais moins fortes).

Le moment « en-acte ». Il s'agit du lieu de l'intuition des objets, des idées, des résultats. L'activité mathématique pendant ce moment est principalement une activité d'exploration et d'imprégnation d'un ou de plusieurs problèmes, mais aussi des objets en jeu pour mieux les connaître (fréquentation d'exemples, non-exemples, contre-exemples). Des analogies et des champs mathématiques voisins peuvent alors être mobilisés, de même que des problèmes plus faibles peuvent être formulés. C'est là que des définitions-en-acte et des *concept image* apparaissent. Ici, la conception lakatosienne est opérationnelle, les opérateurs concernant les changements de cadres et formulations de problèmes, mais aussi la génération d'exemples et contre-exemples étant prédominants.

Un moment intermédiaire entre « en-acte » et « zéro ». Lien possible avec le moment « axiomatique ». Ce moment a deux versants : il s'agit de faire des premières catégories d'objets, de classer et d'exploiter des classifications existantes, mais aussi d'essayer des analogies et de faire des liens avec des concepts existants et théories existantes. Ce qui oriente l'activité de définition ici est principalement la classification, la catégorisation d'objets, et la dénomination de ceux-ci. Les conceptions aristotélicienne et lakatosienne peuvent être opérationnelles. C'est dans le lien avec le moment « axiomatique » et les ponts réalisés avec des théories axiomatiques préexistantes que nous retrouverons la conception poppérienne.

Le moment « zéro ». C'est le lieu des zéro-définitions (définitions de travail) mais aussi de définitions locales de portée plus faible. L'activité mathématique peut se décrire avec des opérateurs lakatosiens (par exemple : utiliser et construire des exemples et contre-exemples, reléguer les monstres) et intègre également d'autres aspects : faire des choses fausses, accéder à une idée de la preuve (la preuve forçant les concepts et les définitions selon les mathématiciens). Ainsi, les zéro-définitions et autres définitions locales auront ici différentes fonctions : nommer ; proposer différentes voies d'accès sur un concept ; travailler sur la preuve ; délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée, d'une conjecture ou d'une preuve ; communiquer. L'opérateur lakatosien « changer de cadre » pourra aussi être mobilisé et un lien pourra être construit avec le moment « axiomatique », en particulier pour les changements de cadres où existe déjà une théorie (finalisée ou locale, voire même en construction).

Le moment « formalisé ». Nous avons retenu cette dénomination afin de souligner l'importance de la dimension « communication » qui intervient à la fois pendant la recherche heuristique mais aussi lors d'une nécessité de formalisation. Il peut s'agir d'une communication impliquant un assujettissement aux règles de l'institution considérée (discussion, séminaire, prépublication etc.) et/ou de la rédaction d'un texte davantage formalisé permettant de régler des inférences. Un saut d'abstraction est réalisé par rapport au moment « zéro ». L'activité mathématique pendant ce moment « formalisé » s'appuie sur certains contrôles de nature lakatosienne tels que : une bonne résistance des définitions et conjectures et/ou preuves et donc la fin des contre-exemples. Lorsqu'une preuve est en jeu, des *proof-generated definitions* peuvent émerger. Des opérateurs poppériens peuvent également être mobilisés, notamment en ce qui concerne l'élaboration d'axiomatiques locales. La rédaction de définitions formalisées impliquera de fait la convocation de la conception aristotélicienne (la recherche de l'esthétisme des définitions construites apparaîtra vraisemblablement aussi), et l'accès au *concept definition* de Vinner (1991). Par ailleurs, la formulation de nouveaux problèmes que nous avons identifiée et décrite dans l'un des opérateurs lakatosiens permettra à l'activité mathématique de se poursuivre et d'explorer de nouvelles ramifications au problème initial. Il s'agit essentiellement d'interroger la généralisation et l'utilisation des définitions, problèmes et résultats, mais aussi la compréhension des nouveaux concepts (ce qui rejoint la dimension « communication » précédemment évoquée). L'exploration de concepts voisins ouvrira également de nouvelles perspectives de travail et s'inscrira dans un nouveau moment « en-acte ».

Le moment « axiomatique ». Nous avons choisi de nommer les définitions produites dans ce moment « théoriques » afin de souligner leur inscription dans une théorie. Il s'agit ici de construire une théorie (qui pourra être momentanément locale) et d'introduire de nouveaux concepts au sein de cette théorie, donc de répondre à certaines contraintes axiomatiques, ce qui nous permet de mettre en évidence l'opérationnalité de la conception poppérienne (NB : l'opérateur concernant la résistance aux réfutations est encore présent). La construction de la théorie en question sera guidée par la recherche du plus petit nombre de conditions initiales pour obtenir le plus grand nombre de résultats et/ou des résultats de plus grande portée. L'axiomatisation pourra également être conduite au-delà du champ mathématique initialement considéré pour unifier des concepts (c'est le cas dans les notions FUG, cf. Dorier et *al*. (1997)). La transposition de concepts à d'autres champs mathématiques ouvrira également de nouvelles perspectives et de nouveaux champs de recherche (c'est le cas par exemple de la topologie et de la géométrie des espaces de Banach).

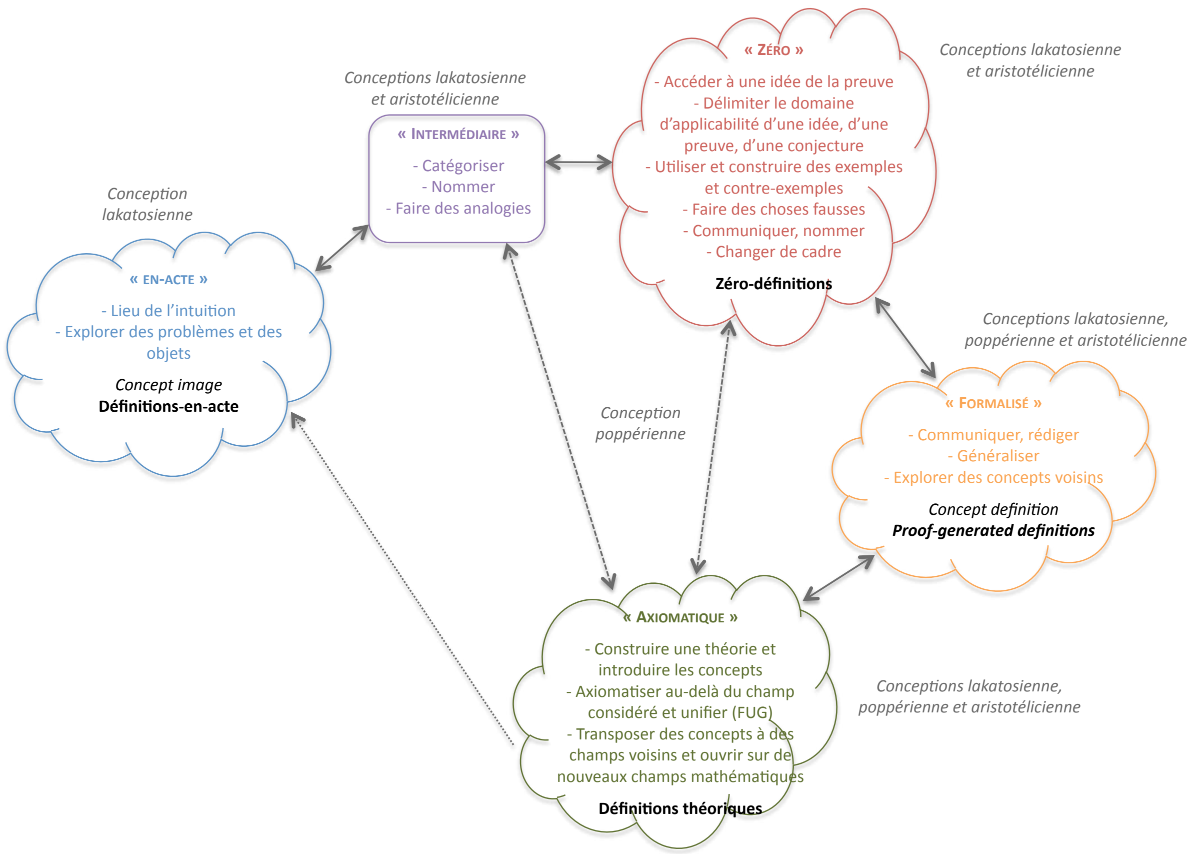


Figure 4 – Représentation globale de l'activité de définition dans la recherche mathématique

III-4.3. Définition des problèmes impliquant une activité de définition

La caractérisation de différents types de problèmes mobilisant une activité de définition peut s'établir, *a priori*, suivant trois catégories :

- Catégorie 1 « (Re)définir un concept familier »
- Catégorie 2 « Définir un concept familier dans un autre cadre »[49]
- Catégorie 3 « Définir un nouveau concept ».

Nous considérons que la description des problèmes ici est la caractérisation de problèmes mathématiques posés à des individus non vierges de connaissances et représentations, dans une institution spécifique (non précisée ici mais qui sera à considérer ultérieurement). Ainsi, dans le but d'étudier un sujet S (qui peut être un étudiant, un enseignant, ou un chercheur) en situation de résolution d'un problème impliquant une activité de définition, nous allons étudier les différents couples (Instance(s), Question(s)) possibles avec les instances qui peuvent être des concepts.

Pour les catégories 1 et 2, les problèmes portent sur la redéfinition de concepts, que ce soit dans le même cadre mathématique ou dans un nouveau cadre. Dans ces deux cas, nous pouvons considérer les conceptions de S sur le(s) concept(s) en jeu, ainsi que les notions de *concept image* et *concept definition*. En effet, un *concept image* préexiste, voire même un *concept definition*.

La catégorie 3 concerne essentiellement les problèmes où, lors de la résolution et/ou d'une preuve en jeu dans ces problèmes, l'on est amené à définir des objets nouveaux dont on va se servir pour avancer dans la preuve. Ces objets peuvent n'avoir qu'un rôle local, mais pas nécessairement : on ne peut pas le décider *a priori*, ce seront des problèmes et utilisations ultérieures qui pourront nous renseigner sur la portée effective de ces concepts. Ce sont ces cas-là qui font le cœur de la catégorie 3. Il est également possible de considérer la catégorie 3 en partie comme mixte, car lors de l'exploration d'un problème, le concept en jeu peut déjà avoir été appréhendé et fréquenté avant que la nécessité de sa définition n'émerge : soit par ses représentations, soit par des exemples et non-exemples, soit par sa mise en œuvre dans une expérience mentale de preuve. Ainsi, il devient d'une certaine façon familier pour celui ou celle qui explore le problème. Ce concept ne sera nouveau qu'au regard des connaissances existantes du sujet S. Dans ce cas, la catégorie 3 sera alors :

- soit une sous-catégorie de la catégorie 1, lorsque le concept est exploré avant sa définition ;
- soit une sous-catégorie de la catégorie 2, lorsque le concept est défini indépendamment de l'axiomatique du cadre initial.

La modélisation des problèmes va conduire à l'explicitation de deux niveaux.

Le premier niveau concerne le problème posé à un sujet S, noté (I, Q) :

- Instance : conception de S sur un concept mathématique μ et problème impliquant μ.
- Question : en relation avec l'activité de définition c'est-à-dire question impliquant une activité de définition (ou plutôt pouvant impliquer une activité de définition avec des instances bien choisies).

Interviennent donc ici deux types de conception : la conception de S sur le concept mathématique considéré et la conception de S sur l'activité de définition. L'étude d'un tel problème permet ainsi d'accéder à des éléments de caractérisations de ces deux conceptions si elles ne sont pas connues au préalable. Une étude conduite sous l'angle des notions de *concept image* et *concept definition* pourra être cependant plus aisée dans un premier temps que celui des conceptions.

[49] Par exemple, redéfinir droite dans le cas discret, ou triangle sur la sphère, ou passer aux réels dans le cas des puissances d'un nombre etc.). Ce qui a trait à la généralisation d'un concept va entrer dans cette catégorie.

Le second niveau est un niveau didactique. Le problème de recherche que nous considérons, en didactique se présente ainsi :

- Instance : le problème (I, Q) défini ci-dessus
- Questions (de recherche en didactique) : Comment agir sur le processus et donc les conceptions en jeu dans le problème (I, Q) ? Comment transmettre ce type de problème ?

Les couples (Instance(s), Question(s)). Nous avons choisi de lister les instances et questions possibles pour établir les couples (I, Q) caractérisant les problèmes permettant une activité de définition. En effet, il est très difficile de concevoir une liste exhaustive des problèmes mathématiques permettant une activité de définition, indépendamment des concepts en jeu. Nous allons donc proposer, à partir de l'étude épistémologique du concept de définition (dont les trois conceptions et les quatre moments) et des entretiens avec les mathématiciens que nous avons conduits, l'ensemble des Instances et des Questions permettant de générer *a priori* des problèmes de construction de définition, sous réserve d'une étude approfondie du concept mathématique retenu, des processus de définition envisageables et d'une définition des conditions expérimentales (connaissances a priori des sujets, constitution du milieu, interventions du gestionnaire). Ainsi, les problèmes (I, Q) peuvent être construits en choisissant un couple parmi les instances et questions suivantes :

- Instances :
    - Exemples et non-exemples via une ou des représentations d'un concept mathématique
    - Exemples et contre-exemples (donnés et/ou à générer)
    - Définitions partielles (voire incorrectes), en construction
    - Définitions en construction ou finalisées dans un domaine mathématique noté DM1
    - Propriété, ou théorème, et/ou conjecture
    - Preuve
    - Conjecture
    - Problème avec exploration du problème, établissement de faits expérimentaux
- Questions :
    - Définir pour délimiter ce que le concept est et ce qu'il n'est pas
    - Définir pour classer
    - Vérifier la validité d'une preuve (éventuellement : recherche d'un lemme caché) ; recherche du domaine de validité d'une preuve
    - Prouver (cela peut être une preuve d'existence ou autre)
    - Conjecturer ; recherche du domaine de validité d'une conjecture
    - Recherche de définitions équivalentes ; preuve de l'équivalence
    - Généraliser une preuve, ou une conjecture
    - Explorer les hypothèses pour rendre un théorème (même non encore complètement prouvé) plus fort (ou plus faible)
    - Plonger le concept dans un autre domaine mathématique noté DM2 : que devient-il ?
    - Construire une axiomatique locale.

Utilisation de la représentation des problèmes en couples (I, Q). Nous allons maintenant faire fonctionner la représentation des problèmes suivant (Instance(s), Question(s)) afin d'établir la liste des problèmes utilisés dans les travaux en didactique impliquant une activité de définition, et ainsi montrer les possibles explorations restantes. Ce sera aussi l'occasion de pointer les concepts mathématiques utilisés dans ces travaux.

Catégorie 1 « (Re)définir un concept familier »

Dans cette catégorie, lorsque nous utiliserons les *concept image* et *concept definition* des étudiants pour décrire les problèmes, il s'agira : soit d'un *concept image* préexistant et l'activité de définition résidera dans la reconstruction d'un *concept definition* (activité préconisée déjà par Vinner, 1991), soit d'un *concept definition* préexistant.

En voici des exemples utilisés dans des expérimentations dans des travaux en didactique.

$\text{Pb}_{\text{Redéf}, 1}$:

- Instance : exemples et non-exemples (générant un *concept image*) ;
- Question : définir pour délimiter ce que le concept est et ce qu'il n'est pas.

Exemples : les travaux de Fletcher (1964) (concept de convexité), Ouvrier-Buffet (2003, 2005) (concepts d'arbre, de convexité), Vinner & Dreyfus (1989) (concepts de fonction), Vinner & Hershkowitz (1980) (concept de triangle).

$\text{Pb}_{\text{Redéf}, 2}$:

- Instance : exemples et non-exemples (générant un *concept image*) ;
- Question : définir pour établir plusieurs classes

Exemples : les travaux de Freudenthal (1973) et De Villiers (1998) sur les quadrilatères.

$\text{Pb}_{\text{Redéf}, 3}$:

- Instance : définitions incorrectes (préexistence d'un *concept image*) ;
- Question : identifier la ou les définitions correctes

Exemple : les travaux de Borasi (1992) (concept de cercle).

$\text{Pb}_{\text{Redéf}, 4}$:

- Instance : *concept image* des étudiants et éventuellement des représentations du concept problématisées dans un problème ;
- Question : demande explicite de définition(s).

Exemples : les travaux de Zandieh & Rasmussen (2010) (triangle dans le plan), Swinyard (2011) (concept de limite), Ouvrier-Buffet (2006) (droites discrètes).

$\text{Pb}_{\text{Redéf}, 5}$:

- Instance : *concept image* des étudiants et une propriété ou un théorème ou une conjecture ;
- Question : demande explicite de définition(s).

Ce type de problème est inspiré des travaux de Rasmussen & Zandieh (2010) (triangles dans le plan et cas d'égalité des triangles). La question pourrait aussi porter sur la vérification de la validité d'une preuve.

$\text{Pb}_{\text{Redéf}, 5\text{bis}}$:

- Instance : *concept image* des étudiants ;
- Question : conjecturer.

Exemples : les travaux de Balacheff (1987) et Borasi (1992) (définition de « diagonale » et « polygones). L'émission de conjectures peut s'appuyer sur des processus : d'induction empirique (étude d'un nombre fini de cas discrets ou, dynamiquement, de cas continus), d'analogie, d'abduction, ou encore de processus initiés par l'étude de faits mathématiques ou de représentations de concepts (cf. Reid, 2002 et Cañadas et *al.*, 2007).

$\text{Pb}_{\text{Redéf}, 6}$:

- Instance : *concept definition* des étudiants et éventuellement représentation du concept ;
- Question : recherche de définitions équivalentes, ou plus précisément d'une condition suffisante minimale.

Exemples : les travaux de Larsen, Rasmussen & Zandieh (2010) (concept de sous-groupe).

$\text{Pb}_{\text{Redéf, 7}}$:

- Instance : donnée d'un objet ostensif ;
- Question : question d'existence / preuve d'impossibilité.

Exemple : les travaux de Koichu (2012) (triangle de Penrose et preuve de son impossibilité en regard de l'axiomatique géométrique).

$\text{Pb}_{\text{Lakatos}} = \text{Pb}_{\text{Redéf, 8}}$:

- Instance : une conjecture, une preuve, des représentations du concept (et ainsi *concept image*) ;
- Questions : validité de la conjecture, analyse de la preuve, classification.

Exemples : les travaux de Lakatos (1984) et certaines reprises de ceux-ci (par exemple Yim, Song & Kim, 2008). On pourrait décliner ce type de problème en séparant les questions qui interviennent dans le processus de P&R, mais aussi le placer dans les autres catégories.

Catégorie 2 « Définir un concept familier dans un autre cadre »

La définition d'un concept familier dans un autre cadre (par exemple, la définition de droites discrètes ou de triangles sphériques) apparaît principalement dans les travaux de Ouvrier-Buffet et Larsen, Zandieh & Rasmussen. Nous avons déjà abordé la question de la « familiarité » et son intérêt dans la fréquentation de situations de définition. Deux processus sont alors possibles : l'adaptation des connaissances du premier cadre au second cadre ou une reconstruction (locale) de nature axiomatique intégrant le concept considéré. La construction de définition(s) émerge soit par nécessité (suivant le *principe de nécessité* présenté par Harel (1998)), soit à la demande explicite du gestionnaire de la situation (nous avons vu que celle-ci à son importance).

Les exemples suivants ont été traités dans des travaux en didactique, sur les triangles sphériques (les travaux de Larsen, Zandieh & Rasmussen, et ceux de Duchet), et les droites discrètes (les travaux de Ouvrier-Buffet).

$\text{Pb}_{\text{Déf autre cadre, 1}}$:

- Instance : *concept image* des étudiants dans un cadre 1 et éventuellement représentations du concept dans un cadre 2 ;
- Question : demande de définition dans le cadre 1 et le cadre 2.

$\text{Pb}_{\text{Déf autre cadre, 2}}$:

- Instance : *concept definition* des étudiants dans un cadre 1 et éventuellement représentations du concept dans un cadre 2 ;
- Question : demande de définition dans un cadre 2.

$\text{Pb}_{\text{Déf autre cadre, 3}}$:

- Instance : *concept definition* des étudiants dans un cadre 1 et une propriété ou un théorème ou une conjecture dans le cadre 1 ;
- Question : étude de la validité de la propriété ou du théorème ou de la conjecture dans un cadre 2, voire demande de définition dans le cadre 2.

Lorsque le chercheur raisonne par analogie et plonge un objet ou un concept dans un autre cadre, nous sommes également dans la présente catégorie (pour un sujet S chercheur). Supposons que S connaisse déjà l'objet ou le concept en question dans un domaine mathématique noté DM1 et qu'il cherche à résoudre un autre problème, dans un autre cadre noté DM2 en essayant de transposer cet objet ou concept de DM1 dans DM2 pour y étudier son comportement et les interrelations avec les éléments de DM2. Dans ce cas, le problème du mathématicien a :

- pour instances : la définition du concept en jeu (ou seulement une conception sur ce concept peut-être encore en construction) et l'axiomatique de DM1, et DM2 ;
- pour question : comment ce concept se comporte-t-il dans DM2, et comment le retransposer et le redéfinir dans DM1 et/ou DM2 ?

Et cela va générer de nouveaux problèmes, dans DM2 et/ou dans DM1.

Nous n'avons pas d'exemples de problèmes de **Catégorie 3** dans les travaux didactiques existants à ce jour, cela reste à explorer.

III-4.4. Une méthodologie pour concevoir et analyser des situations de définition

La principale difficulté ici réside dans le choix d'un concept mathématique et dans l'exploration *a priori* de ce concept afin de déterminer des problèmes appropriés et d'envisager plusieurs zéro-définitions potentielles, voire des preuves et conjectures impliquant ce concept.

La question se pose ensuite de la familiarité avec ce concept. Nous avons vu que le fait de proposer une voie d'accès via des représentations de ce concept et/ou l'exploration de problèmes dans lesquels il est impliqué est fondamental et permettra l'élaboration d'un premier *concept image*, qui servira de point d'appui pour le travail sur les zéro-définitions. Les problèmes initiaux pourront être formulés en fonction de différents choix de couples (Instancee(s) ; Question(s)) qui dépendront du niveau des étudiants et des concepts considérés. Dans le cas d'un changement de cadre, le fonctionnement sera similaire et pourra impliquer la redéfinition d'une axiomatique locale.

L'étude *a priori* en termes de zéro-définitions peut être conduite en parallèle des quatre moments de l'activité de définition.

Quant à la gestion en classe, elle peut être calibrée via la connaissance des trois conceptions (artistotélicienne, lakatosienne, popérienne), qui peuvent, elles aussi, contribuer à la définition *a priori* de sous-problèmes. Le gestionnaire-obsvervateur devra intervenir « le moins possible », et cela reste un pari. Cela pose la question de choix entre des problèmes totalement ouverts (pour l'enseignant et les étudiants) et des problèmes *open-ended* (ouverts pour les étudiants, fermés pour l'enseignant).

Dans le cadre plus large de la conception d'une situation fondamentale pour le concept de définition, la situation de « première rencontre », qui pourra reprendre la méthodologie découlant des travaux de Zandieh & Rasmussen (2010) (voir §II-8.3) fera l'objet d'un travail d'institutionnalisation de l'activité de définition, qui reste à définir, tout comme les variables de la situation fondamentale. Dans le cadre plus restreint de la DMA (*Defining as a Mathematical Activity*), la conception d'une progression suivant les *concept image* et *concept definition* pensée par Zandieh & Rasmussen (2010) à partir du cadre de Gravemeijer (1999) pourra aussi être utilisée.

III-5. Illustration de l'utilisation de notre modélisation sur un exemple : le concept d'arbre

Présentation du concept d'arbre et exploration de ses définitions. L'arbre est un concept central de la théorie des graphes, qui possède de nombreuses définitions équivalentes accessibles avec peu de connaissances. Dans la théorie, il est en général étudié et utilisé en tant que graphe ayant des propriétés particulières. Mais on peut aussi le décrire de manière simple par analogie avec l'objet de la biologie végétale, associée à sa représentation usuelle avec des points et des traits qui contient de nombreux ostensifs basés sur la perception, la combinatoire ou encore l'induction. L'arbre est ainsi un concept « facile » d'accès par sa représentation {sommets ; arêtes} ; la distinction entre ce qui est un arbre et ce qui n'en est pas est non problématique, même si la propriété de connexité est, elle, plus complexe.

Nous nommerons : *graphe* un objet composé de points (sommets) et de traits (arêtes), *arbre* un graphe en un seul morceau (*connexe*) sans cycle, *forêt* un ensemble d'arbres disjoints (il s'agit ici de la recherche du *genre*). Si nous recherchons maintenant les *différences spécifiques* de l'arbre au sein du *genre* « graphe », nous trouvons les propriétés suivantes :

> **CONNEXE** : connexe (ou encore *en un seul morceau*) ;
> **~~CYCLE~~** : sans cycle ;
> **CHEMIN** : existence d'un chemin d'un sommet quelconque à n'importe quel autre sommet ;
> **[*n*, *n*-1]** : représentation ayant *n*-1 arêtes pour *n* sommets.

Chacune de ces propriétés relève d'un point de vue spécifique sur l'objet. Une approche **perceptive** globale peut mettre en évidence les propriétés **CONNEXE** et **~~CYCLE~~**, relevant d'une description morphologique de l'objet. En revanche, la propriété **CHEMIN,** comme son nom le suggère, nécessite un cheminement sur l'objet, l'approche est donc plus **analytique**. Enfin, la propriété **[*n*, *n*-1]** nécessite une conjecture sur la relation entre nombre de points et nombre d'arêtes dans un arbre, c'est-à-dire une approche de nature **combinatoire**. Une autre approche du concept est accessible à partir de la même représentation {sommets ; arêtes} . Cette approche, dite **inductive**, n'est pas la moindre, car elle est basée sur une propriété qui fonde l'épistémologie du concept d'arbre : un arbre se décrit et se construit, à partir d'un point ou d'un arbre donné, en rajoutant un nouveau point et une arête reliant ce nouveau point et un point ancien, de telle façon qu'il n'y ait pas de cycle. Nous la désignerons par **INDUCTION**. Enfin, une approche **dynamique** de l'objet, c'est-à-dire impliquant une action sur cet objet, peut être la suivante : il est possible de modifier un arbre en lui enlevant un sommet, une arête voire davantage, et d'étudier l'objet restant.

Étudions maintenant les définitions mathématiques de l'arbre et les voies possibles permettant leur émergence lors d'une activité de définition (voir le Tableau 9 ci-après).

La définition **Def1** peut être l'aboutissement d'un travail de description de l'objet basé sur le perceptif et la mise en évidence des propriétés **~~CYCLE~~** et **CONNEXE**. La considération de la propriété **CHEMIN** (**Def2**) pose la question des manières de parcourir le graphe ; des questions relatives à l'orientation peuvent surgir. L'étude combinatoire de la conjecture **[*n*, *n*-1]** peut induire des définitions telles que **Def3** et **Def4**. Elle n'est possible que sur des graphes ayant peu de sommets. L'approche dynamique de l'objet décrite ci-dessus est moins probable que les précédentes (ce n'est pas l'usage, en particulier dans l'enseignement, de modifier l'objet donné). Elle est basée sur les propriétés suivantes : si on supprime une arête quelconque sur un arbre, on perd la connexité ; si on ajoute une feuille à un arbre, on a toujours un arbre. Il est ainsi possible d'aboutir à des définitions où l'optimalité est considérée, telles les définitions **Def5** et **Def6**. Enfin, l'approche dynamique permet également d'aboutir aux définitions inductives **Def7**, **Def8**, **Def9**, et **Def10**.

Cette étude nous permet de faire l'hypothèse que différentes zéro-définitions peuvent émerger, dans une situation de construction de définitions de l'arbre basée sur la représentation du concept par un ensemble de sommets et d'arêtes.

Soit G un graphe. **G est un arbre si et seulement s'il vérifie l'une des propriétés suivantes.**	
Définitions	**Nature principale des définitions**
Def1 - G est connexe sans cycle.	Perceptive, structurelle
Def2 - Entre deux sommets quelconques de G, il existe un unique chemin[50].	Perceptive, cheminement
Def3 - G (à *n* sommets) est sans cycle avec (*n*-1) arêtes	Combinatoire
Def4 - G (à *n* sommets) est connexe avec (*n*-1) arêtes	Combinatoire
Def5 - G est sans cycle et en ajoutant une arête, on crée un cycle (graphe sans cycle maximal[51])	Dynamique (nécessite une action sur l'objet), optimal
Def6 - G est connexe, et si on supprime une arête quelconque, il n'est plus connexe (connexe minimal[52])	Dynamique
Def7 - Un arbre est soit un sommet isolé, soit un arbre auquel on ajoute un sommet pendant[53].	Inductive (ascendante), dynamique constructive
Def8 - G est soit un sommet isolé, soit un graphe A, qui, privé d'un sommet pendant quelconque est soit un arbre, soit un sommet isolé.	Inductive (descendante), dynamique constructive
Def9 - Un arbre est soit un sommet isolé, soit deux arbres reliés par une arête.	Inductive, dynamique
Def10 - Un arbre est soit un sommet isolé, soit le graphe obtenu à partir d'une forêt[54] en reliant un nouveau sommet à un sommet de chacun des arbres de la forêt.	Inductive, dynamique

Tableau 9 – Définitions de l'arbre

Types de problèmes possibles impliquant le concept d'arbre. Il peut s'agir d'un problème de classification où une demande explicite de définition est formulée, des exemples et contre-exemples d'arbre étant donnés et désignés comme tels.

Si nous recherchons maintenant un problème de modélisation (ou de changement de cadre) où la construction de définition serait nécessaire, c'est-à-dire permettrait la résolution de la question posée, nous trouvons l'ensemble des problèmes de recherche de labyrinthes[55] où il y a modélisation du labyrinthe par des arbres. Il ne s'agit pas de travailler au sein de la théorie des graphes mais de modéliser, mathématiser la situation par les arbres, qui possèdent la propriété recherchée (existence d'un unique chemin).

Un autre type de problèmes consisterait à rechercher une modélisation des arbres naturels (biologiques), c'est-à-dire à rechercher la structure mathématique commune à tous les arbres

[50] Dans tout le texte, chemin est non orienté.
[51] Maximal pour le nombre d'arêtes.
[52] Minimal pour le nombre d'arêtes.
[53] Un sommet pendant est un sommet qui n'est adjacent qu'à un seul sommet.
[54] Forêt : ensemble d'arbres disjoints.
[55] Construire un labyrinthe où, entre deux points quelconques du labyrinthe, il existe un et un seul chemin.

naturels. Dans ce cas, définir l'arbre aurait une utilité unificatrice, généralisatrice, et impliquerait en particulier une discussion sur racine, feuille, forêt.

Nous pourrions aussi imaginer un problème mettant en jeu une formule conjecturée telle celle-ci : pour *n* points, il y a (*n*-1) traits. Il s'agirait alors de caractériser la classe d'objets vérifiant cette formule. Les objets vérifiant cette formule sont des graphes non connexes (avec des composantes connexes quelconques) ou des arbres. Les composantes comportant des cycles peuvent être « compensées » par plusieurs composantes de type « arbre ». L'étude du rapport entre le nombre de cycles et le nombre de composantes peut faire ressortir l'intérêt des graphes particuliers que sont les arbres et permettre la construction de différentes définitions, basées sur les propriétés **CONNEXE, ~~CYCLE~~, CHEMIN, [*n*, *n*-1]**.

Les conceptions aristotélicienne (pour classer mais aussi rédiger une définition) et lakatosienne (processus de réfutations et de construction de concept) sont ici mobilisables dans la perspective d'une construction de définitions. La conception poppérienne sera opérationnelle lors de construction d'axiomatiques locales essentiellement.

Une situation retenue pour les expérimentations. Nous avons choisi de ne présenter ici que l'une des situations expérimentales, afin d'illustrer la mise en œuvre de notre modélisation de l'activité de définition pour l'analyse des procédures des étudiants. L'expérimentation en question est composée de trois phases :

- Phase 1 : il s'agit d'une phase de classification à partir d'exemples et contre-exemples d'arbre identifiés comme tels, le concept en jeu étant désigné par le nom « truc », neutre, dont la sémantique n'est rattachée à rien. Dans cette phase, les exemples et contre-exemples sont choisis pour permettre un appui sur les propriétés « perceptives » de l'objet mathématique, à savoir **CONNEXE**, et **~~CYCLE~~**, et pour éviter que des caractéristiques qui n'auraient « rien à voir » avec le concept d'arbre soient induites (nombres de sommets, arêtes courbes ou droites, etc..). Le critère de « fin de la tâche » est à la charge des étudiants, la phase suivante n'étant pas annoncée. La fonctionnalité évoquée de la ou des définitions construites est la communication à des pairs.

- Phase 2 : il s'agit d'une phase d'institutionnalisation (par le gestionnaire de la situation) du nom « arbre » et de concepts et noms de propriétés nécessaires pour la phase suivante (graphe, sommet, arête, chemin, connexe, sans cycle), propriétés ayant émergé *a priori* dans la phase 1. Le gestionnaire de la situation n'apporte pas lui-même ces concepts et propriétés, mais il en gère la dénomination.

- Phase 3 : il s'agit d'une phase de réinvestissement des définitions construites par les étudiants, avec la recherche d'une preuve.

Articulation des conceptions pour esquisser une analyse *a priori*. La méthode de définition par *genre et différences spécifiques* permet en effet de déterminer - voire de nommer - un genre (graphe), puis de rechercher des propriétés caractéristiques de l'arbre, celui-ci étant considéré comme un graphe particulier. Les exemples et contre-exemples donnés favorisent ce processus, mais ne le mènent pas forcément à son terme. Il nous faut donc rechercher, dans la conception aristotélicienne, mais aussi dans la conception lakatosienne où une démarche de généralisation peut être à l'œuvre, des opérateurs et des contrôles langagiers et logiques pouvant intervenir dans ce processus. Rappelons que l'aspect nominal a été écarté. Les opérateurs langagiers qui peuvent être mobilisés ici par les étudiants seront fortement liés à la fonction de communication de la définition : il s'agira de pouvoir expliquer l'objet « truc » à un tiers. Ces mêmes opérateurs peuvent également jouer le rôle de contrôles. Des opérateurs logiques aristotéliciens peuvent être mobilisés pour proscrire la redondance dans l'énoncé ou l'utilisation de mots non encore définis. Ils peuvent induire une définition de « graphe ».

Ils peuvent eux aussi agir également en qualité de contrôles. En revanche, nous faisons l'hypothèse que la question de l'existence de l'objet à définir ne se posera pas (des représentations de l'objet étant données) : de même, la question de l'équivalence entre le nom et un énoncé définissant n'est pas en jeu ici, mais la question de l'équivalence entre plusieurs définitions peut se poser. La phase 1, mettant l'accent sur la caractérisation de l'objet mathématique représenté, peut induire, par elle-même, la génération de nouveaux exemples et contre-exemples (opérateur lakatosien) : par exemple, on construit de nouveaux « trucs » ou de nouveaux « non trucs », pour tester si une propriété repérée sur les exemples donnés est bien un invariant dans la définition que l'on met en place. Ainsi, les opérateurs *a priori* mobilisables dans la phase 1 sont nombreux : définition par *genre et différences spécifiques*, opérateurs langagiers ou logiques, opérateurs liés à la fonction de communication de la définition, utilisation de la génération d'exemples et contre-exemples. Ceci est pour nous significatif de la richesse de la tâche.

Lors de la troisième phase impliquant la recherche d'une preuve, si une reconstruction de définitions s'amorce, des opérateurs et contrôles lakatosiens peuvent là aussi être mis en œuvre, guidés par la fonction de la preuve demandée, liée à une dialectique entre preuve, définitions et construction de définitions (ce que Lakatos appelle *catalyse*) et la production de contre-exemples (réfutations).

Analyse synthétique des productions des étudiants. Nous avons expérimenté cette situation avec trois groupes d'étudiants de première année d'université (Ouvrier-Buffet, 2003). La construction et la cohabitation de différentes définitions ne leur ont pas posé problème. Nous avons étiqueté dans les protocoles des énoncés s'apparentant à des définitions-en-acte, zéro-définitions, et *proof-generated definitions*. Les zéro-définitions peuvent ne pas être perçues par les étudiants comme des définitions provisoires, mais plutôt comme des « idées ». Repérer ces zéro-définitions nous a permis de souligner en particulier la progression des étudiants vers la production de définitions.

L'objet du tableau de synthèse ci-dessous est de montrer les ressemblances et différences entre les productions des trois groupes. Quand la production est une définition, nous donnons son numéro. Quand la production est une propriété, nous donnons son nom.

Groupe	Productions des étudiants	Opérateurs	Contrôles	Fonctions des définitions
1	**2 zéro-définitions (Def1, Def2) et 1 *proof-generated definition* ([*n*, *n*-1], CONNEXE)**	$\mathbf{R}_1^{L}$: génération d'exemples et contre-exemples. Contrôle aristotélicien (partiel) utilisé comme opérateur : une définition est une condition suffisante. Opérateur aristotélicien $\mathbf{R}_5^{A}$ et opérateurs potentiels : $\mathbf{R}_2^{A}$ et $\mathbf{R}_3^{A}$.	- Pôle lakatosien « heuristique » (utilisation des exemples et contre-exemples donnés pour vérifier la validité d'un énoncé). - Pôle aristotélicien « Langage ».	Communiquer Comprendre Construire
2	**2 définitions-en-acte (Def2, Def7) et 2 zéro-définitions (Def1, Def10)** **Également abordés mais non formalisés :**	$\mathbf{R}_1^{L}$: génération d'exemples et contre-exemples. : défendre la définition en l'étendant. : exclure de la définition une classe d'objets contenant les contre-exemples. Contrôle aristotélicien utilisé	- Pôle lakatosien « heuristique » (utilisation des exemples et contre-exemples donnés et générés pour vérifier la validité d'un énoncé). Pôle aristotélicien « logique » (partiel) : une	Communiquer Construire Prouver

	CHEMIN, [n, n-1]	comme opérateur : une définition est une condition nécessaire et suffisante. Opérateur aristotélicien $\mathbf{R}_5^{\mathbf{A}}$ et opérateurs potentiels : $\mathbf{R}_2^{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{R}_3^{\mathbf{A}}$.	définition est une condition suffisante. Pôle aristotélicien « Langage ».	
3	**3 zéro-définitions (Def1, Def2, Def7)** **Également abordés mais non formalisés :** **~~CYCLE~~, Def10**	$\mathbf{R}_1^{\mathbf{L}}$ Contrôle aristotélicien (partiel) utilisé comme opérateur : une définition est une condition suffisante. Opérateur aristotélicien $\mathbf{R}_5^{\mathbf{A}}$ et opérateurs potentiels : $\mathbf{R}_2^{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{R}_3^{\mathbf{A}}$. $\mathbf{R}_4^{\mathbf{A}}$: prouver l'équivalence entre définitions.	Pôle lakatosien « heuristique » (utilisation des exemples et contre-exemples pour vérifier la validité d'un énoncé). Pôle aristotélicien « Langage ». $\mathbf{R}_4^{\mathbf{A}}$ est aussi utilisé comme contrôle (équivalence entre Def1 et Def2).	Comprendre Construire

Tableau 10 – Résumé des productions et processus des étudiants

Exploitations des productions et processus des étudiants. Nous allons ici présenter de manière résumée les exploitations principales du tableau de synthèse précédent rendues possibles par notre modélisation. La lecture du tableau 10 fait ressortir en particulier que, dans cette expérimentation, pour ces étudiants, les conceptions aristotélicienne et lakatosienne sont majoritaires. Différents moments de l'activité de définition ressortent, attestés par la production de différents types de définition (définition-en-acte, zéro-définition, *proof-generated definition*) : il s'agit des moments que nous avons appelé « en acte », « zéro » et « formalisé ». Le niveau « formalisé » n'est que partiellement atteint : pour continuer son exploration, il faudrait engager les étudiants à poursuivre leur activité mathématique selon les lignes indiquées dans le descriptif de ce niveau. En creux, la synthèse présentée dans le tableau 10 montre également, au regard des conceptions que nous avons décrites précédemment, les leviers encore disponibles pour le gestionnaire de la situation, en termes d'opérateurs et de contrôles, et les contenus possibles d'institutionnalisations sur l'activité de définition. Faire une telle synthèse permet également d'établir les conceptions des étudiants sur le concept de définition et d'évaluer des évolutions de celles-ci au cours d'expérimentations ultérieures, impliquant d'autres concepts mathématiques et d'autres types de problèmes : il suffit de comparer les opérateurs et contrôles mobilisés de ceux des conceptions aristotélicienne, poppérienne, et lakatosienne lors de différentes expérimentations. Une telle démarche rejoint la construction d'une situation fondamentale pour le concept de définition en mathématiques. Par ailleurs, il serait aussi possible d'identifier les conceptions des étudiants sur le concept mathématique en jeu et de les faire évoluer en jouant sur les problèmes mathématiques proposés.

Nous n'avons pas abordé dans cet exemple la conception poppérienne qui n'a pas été mobilisée ici par les étudiants : le concept mathématique d'arbre, et la situation proposée, ne s'y prêtaient pas. Deux autres situations, analysées dans Ouvrier-Buffet (2006, 2011), peuvent nécessiter la conception poppérienne : elles impliquent les concepts de « droite discrète » (ce qui permet d'accéder à une problématique de nature axiomatique plus rapidement), et les concepts de « générateur », « minimalité », « dépendance » dans le cadre discret (qui nécessitent quant à eux une axiomatique locale et posent la question de l'évolution de leurs définitions lors du passage au continu).

IV- Conclusions et perspectives scientifiques

Conclusion. Notre travail de recherche a permis de construire un cadre épistémologique de référence pour modéliser l'activité de définition et ainsi pour donner un accès au concept de définition en mathématiques. Ce cadre de référence est constitué des trois conceptions aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne, de la définition des problèmes impliquant une activité de définition via des couples (Instance(s), Question(s)), et de la mise en évidence de quatre moments de l'activité mathématique qui permettent de donner une image globale de l'activité de définition. La principale difficulté dans cette modélisation résidait dans le fait que le concept de définition, et l'activité de définition, en mathématiques, appartiennent à la sphère privée du mathématicien : il s'agissait donc de modéliser des conceptions appartenant à la pratique du mathématicien plus qu'à un texte du savoir savant. L'utilisation souple des μ-conceptions (Balacheff, 1995) et la mise en œuvre du concept-problème nous ont permis de considérer des instanciations de la pratique du mathématicien et des problèmes impliquant une activité de définition. L'étude épistémologique donne ainsi maintenant un cadre déjà partiellement éprouvé (Ouvrier-Buffet, 2006 & 2011) pour analyser dans une perspective didactique la conception et l'implémentation en classe de situations de définition. Elle permet en particulier d'anticiper et de gérer des processus de définition, en proposant des indicateurs, balises de l'activité de définition, mais aussi des leviers pour faire évoluer un processus de définition ou un problème.

Ouvertures et travaux en cours. Nos perspectives de recherche se situent à trois niveaux en interrelation constante : épistémologique, théorique, et didactique.

Au niveau épistémologique. Nous avons abordé la question de concepts « plus favorables » que d'autres pour engager une activité de définition. Cependant, une étude encore plus approfondie, notamment par la suite des entretiens avec les chercheurs, des processus de définition à l'œuvre dans d'autres champs des mathématiques que ceux explorés jusqu'à maintenant peut être bénéfique pour un enrichissement (et implicitement une validation) de notre modélisation.

Nous projetons également de faire fonctionner notre modélisation de l'activité de définition, à différents niveaux, pour produire de nouveaux résultats épistémologiques. Il pourra s'agir de collaborations avec des historiens pour conduire des analyses de textes historiques et permettre ainsi une caractérisation spécifique, via des balises que sont les définitions, de génération de concepts, mais aussi de travaux avec des mathématiciens.

Nous souhaitons en effet analyser plus spécifiquement le champ de recherche de la géométrie discrète contemporaine, déjà vue comme prometteuse pour des expérimentations didactiques (cf. Ouvrier-Buffet, 2006), au-delà de ce que Werndl (2009) a proposé comme analyse de productions explicites de mathématiciens accessibles dans des ouvrages et articles mathématiques pour la théorie ergodique. Le choix de la géométrie discrète se justifie à plusieurs niveaux. L'interprétation de données discrètes implique un traitement dans un espace continu (méthodes d'approximation et méthodes paramétriques – lien avec l'algorithmique) d'une part, et une définition des objets discrets sous-jacents au problème, ainsi que l'exploration de leurs propriétés (voire la construction d'une axiomatique spécifique) d'autre part. Se dégagent ainsi plusieurs problématiques, et donc plusieurs perspectives de recherche à investiguer, au sein de ce champ mathématique : une problématique forte de la définition des objets discrets (pour la reconnaissance et la construction de ceux-ci), la question encore vive dans la recherche de la construction d'une axiomatique pour la géométrie discrète, l'exploration des liens entre le discret et le continu. De nouveaux axes de recherche se dessinent alors. S'inspirer de la nature des questionnements de la géométrie discrète peut en effet être fructueux à au moins deux niveaux : l'étude de processus propres à la démarche de recherche en mathématiques, en particulier le processus de définition, et le lien avec des concepts déjà existants et déjà retransposés dans des géométries non-euclidiennes par exemple. Ceci implique un intérêt supplémentaire qui réside dans une comparaison de processus de définition entre une géométrie non-euclidienne et la géométrie discrète. Par ailleurs, au niveau épistémologique, l'étude de la géométrie discrète peut nous renseigner par rapport à la façon dont Lakatos a conduit son étude : Lakatos se situait à un moment de l'histoire où naissait une nouvelle branche des mathématiques, celle de la topologie algébrique. D'où la question épistémologique digne d'intérêt aujourd'hui : quelles sont les similitudes entre ce que Lakatos a mis en évidence dans *Preuves & Réfutations* et ce qui est en cours dans la recherche en géométrie discrète quant aux processus de construction de concepts et de preuve ?

Par ailleurs, une réflexion sur la place de la logique dans l'étude des relations entre définition et preuve peut être posée. Celle-ci n'a pas été posée dans cette note de synthèse comme objet spécifique d'étude : elle est cependant prise en compte dans l'étude des conceptions et des moments de l'activité de définition. Cela étant, la place de la logique dans la dialectique entre l'activité de définition et l'activité de preuve peut clairement devenir un objet de recherche à part entière.

Enfin, la question plus générale des fondements épistémologiques de la démarche de recherche en mathématiques est aussi un point à travailler, afin de mettre en évidence la spécificité de cette démarche au regard des démarches d'investigation en sciences (voir plus loin).

Au niveau théorique. La question de l'élaboration d'une situation fondamentale pour le concept de définition doit être approfondie, selon deux orientations : la définition des variables de cette situation, mais aussi l'étude du milieu, qui est en quelque sorte implicite lors de l'utilisation de notre modélisation via les conceptions.

Nous projetons également d'engager une réflexion concernant l'utilisation du modèle de problème inspiré de Garey & Johnson (1979) et de son efficience pour de futurs travaux en didactique concernant la formation de concepts et la modélisation de conceptions. Il existe à ce jour, en didactique des mathématiques, trois cas d'utilisation de ce modèle : Giroud (2011) sur la démarche expérimentale, Modeste (2012) sur l'algorithme et notre travail sur le concept de définition. Les connexions avec les μ-conceptions sont de différentes natures et ne sont pas explicitables de la même façon. De plus, les instances et questions sont elles aussi de natures différentes dans ces travaux du fait des concepts considérés comme objet d'étude. Enfin, les liens entre problèmes et milieu restent à éclaircir. Et la question concernant la façon dont les étudiants se constituent une ou plusieurs conceptions sur un concept et comment les faire évoluer est également une problématique à traiter et à élargir à d'autres concepts mathématiques. Nous projetons d'engager de telles investigations dans notre groupe IREM sur les démarches de recherche en mathématiques, mais aussi dans l'élaboration d'un projet international impliquant le *problem-solving*.

Il est également possible d'ouvrir le questionnement théorique sur les institutions et la dialectique OM/OD afin de proposer une modélisation alternative de l'activité de définition. Par ailleurs, dans la mesure où l'étude des pratiques des mathématiciens se développe aujourd'hui dans la communauté didactique, il serait nécessaire de concevoir un cadre théorique commun qui permettrait de centraliser les différents résultats obtenus et de montrer les convergences et points de tension. Cela a une conséquence didactique forte, à explorer : il n'est bien sûr pas question que l'on attende des étudiants une pratique à l'identique de celles des mathématiciens. Les mathématiciens partagent un cadre de référence commun, celui de la communauté mathématique, ce qui n'est pas le cas des étudiants. Pour mettre à profit l'étude des pratiques des mathématiciens dans une perspective didactique, il est nécessaire d'étudier les conceptions initiales des étudiants sur l'activité considérée (preuve, définition ou autre), conceptions basées sur leurs expériences, d'identifier les besoins des étudiants, et ainsi de concevoir des parcours appropriés de construction de compétences qui sont transversales aux mathématiques, voire aux sciences. Ces perspectives de recherche rejoignent celles décrites ci-dessous où nous allons aussi considérer l'enseignant. Le cadre des domaines d'expérience de Boero et *al*. (voir par exemple Boero & Douek, 2008) peut se révéler propice à des collaborations internationales sur l'étude des pratiques des mathématiciens, de même que les Espaces de Travail Mathématiques dans une perspective didactique (Kuzniak, 2011). Rappelons que Humenberger & Reichel (2003) cherchaient déjà à placer les enseignants dans des situations où ils mobilisent une recherche personnelle et construisent des mathématiques. Le travail que nous avons conduit avec Knoll (2007) propose la caractérisation d'une méthode pour impliquer sur un long terme des enseignants du primaire dans une démarche de recherche. En plus d'une méthodologie d'analyse des résultats novatrice, nous avons montré l'impact de ce genre de formation sur leur vision des mathématiques et sur l'importance de créer une communauté de recherche.

D'une manière plus transversale, l'outil théorique proposé dans cette note de synthèse pour modéliser l'activité mathématique de définition est de nature générique. Il peut en effet s'appliquer à un large spectre de contenus et de processus mathématiques, et ce quelque soit le niveau de classe visé pour des analyses didactiques.

Au niveau didactique. L'utilisation de la modélisation complète présentée ici au niveau didactique doit être conduite. En effet, les conceptions ont déjà été utilisées et ont montré leur efficacité pour concevoir et analyser des situations de construction de définitions (Ouvrier-Buffet, 2006 & 2011). Il s'agit maintenant de générer de nouvelles situations impliquant une activité de définition et d'étudier leur transmission à des enseignants.

Cette question rejoint celle, déjà évoquée en introduction, des conceptions des enseignants sur l'activité mathématique en général et l'activité de définition en particulier, et de l'évolution de celles-ci. Nous avons à notre disposition les réponses à deux questionnaires semblables, espacés de 14 ans, qui vont nous permettre de mettre à jour les conceptions d'enseignants du secondaire sur l'activité de définition et évaluer, dans un second temps, l'éventuelle évolution de celle-ci sur cet espace de temps. Par ailleurs, la question de la diffusion de conceptions sur les démarches d'investigation en sciences dans les conceptions des enseignants et des étudiants sur la démarche mathématique est à étudier et n'a pas encore été pris en charge par les didacticiens. Cela implique notamment une étude fine des fondements épistémologiques propres à ces démarches de recherche. Cette étude est en cours, en collaboration avec deux didacticiens des sciences (Ouvrier-Buffet, De Hosson, Bosdeveix, en cours). Ces questionnements s'inscrivent dans le cadre plus large des processus impliqués dans une démarche expérimentale, mobilisant des heuristiques, et rejoignent ainsi les courants du *problem-solving* et du *problem-posing*. Il est vrai que la question de « l'enseignement » d'heuristiques n'est pas simple comme l'indique Burkhardt (1988)[56] en pointant les raisons

[56] Burkhardt (1988) rappelle en particulier la position de l'enseignant « qui ne sait pas » :

> **mathematically** - the teachers must perceive the implications of the students' different approaches, whether they may be fruitful and, if not, what might make them so.
>
> **pedagogically** - the teacher must decide when to intervene, and what suggestions will help the students while leaving the solution essentially in their hands, and carry this through for each student, or group of students, in the class.

suivantes : les enseignants doivent être à même de proposer des rétroactions aux étudiants en faisant face à différents processus de résolution, ils doivent aussi anticiper ces rétroactions et les limiter le plus possible, ils doivent être confiants dans la gestion de problèmes où ils « ne savent pas ». Ici, en définitive, ce n'est pas tant la question de l'enseignement d'heuristiques qui se pose, mais bien celle de la formation des enseignants en ce qui concerne la démarche mathématique, question que nous retrouvons et traitons dans le cadre des SiRC. Le groupe IREM sur la démarche de recherche en mathématiques à Paris 7 que nous avons créé travaille notamment sur la définition de modalités pour transmettre des SiRC à des enseignants.

Par ailleurs, la question de l'appropriation de nouveaux « savoirs » par les enseignants se pose de manière forte, à l'heure où les programmes intègrent de nouveaux contenus d'enseignement (nouveaux, y compris pour les enseignants) : comment se fait-elle ? Avec quelles ressources ? Comment les transmettent-ils ? Nous pensons ici en particulier à des savoirs notionnels, tels que les graphes ou l'algorithme, introduits ces dix dernières années dans les programmes du secondaire, ou des savoirs transversaux aux mathématiques, tels que la démarche mathématique ou l'activité de définition. Nous continuons à travailler cette dimension, dans le prolongement des travaux réalisés avec Modeste et Gravier (Modeste, Ouvrier-Buffet & Gravier, 2010 ; Modeste, 2012) et projetons de proposer de nouveaux axes de recherche sur l'appropriation de nouveaux savoirs par les enseignants et l'étude des ressources et formations à leur disposition en rejoignant les travaux de Gueudet & Trouche (2010).

D'une manière plus spécifique, nous pouvons noter une place grandissante des mathématiques discrètes dans l'enseignement (algorithmes, graphes, arithmétique etc.), en France et à l'étranger. Elle répond à une nécessité sociétale. Ce champ des mathématiques est en fait diffus dans les institutions « enseignement », en particulier car il n'est pas identifié sous une étiquette rassemblant les concepts qui le composent comme l'est l'analyse par exemple, mais aussi car beaucoup de problèmes issus des mathématiques discrètes sont utilisés à des fin de diffusion et de vulgarisation de la culture mathématique (Fête de la Science, Rallyes mathématiques etc.). Au niveau didactique, c'est un champ plein de promesses, dont l'investigation est à approfondir (Heinze et *al.*, 2004 ; DIMACS, 2001 ; Ouvrier-Buffet, 2014), en mettant en relation didacticiens et mathématiciens. Cette branche « jeune » des mathématiques suscite l'intérêt depuis quelques années du fait des nouvelles potentialités qu'elle offre. En effet, elle permet d'engager les étudiants dans une démarche mathématique, offrant ainsi un champ à part entière pour l'apprentissage de la preuve, de la modélisation, mais pas seulement. Certains soulignent même combien l'expérience en mathématiques discrètes peut favoriser le développement de processus heuristiques chez des étudiants ayant des difficultés en mathématiques (par exemple, Goldin, 2004). Une autre perspective, qui nous intéresse particulièrement, s'ouvre également : il s'agit d'appréhender, dans le discret, des concepts réputés difficiles à enseigner dans le continu (nous avons proposé dans Ouvrier-Buffet (2011), une ouverture sur l'algèbre linéaire via une situation dans le discret). Se posent alors des questions encore plus « méta » concernant : les liens entre discret et continu (ils seront approfondis dans un projet ECOS avec le Chili), la pertinence d'avoir recours aux mathématiques discrètes pour enseigner des concepts enseignés dans un cadre continu, mais aussi la mise en place d'une problématique et la construction d'un questionnement mathématique (ou : comment permettre à des étudiants d'avoir une expérience mathématique ?). Cela rejoint en partie les préoccupations de la commission

---

personally - the teacher will often be in the position, unusual for mathematics teachers and uncomfortable for many, of not knowing; to work well without knowing all the answers requires experience, confidence, and self-awareness. (Burkhardt, 1988, p. 18) enseignement de la SMF sur la nécessaire refonte des contenus de la licence : cela étant, la question concernant l'agencement des concepts dans l'enseignement universitaire demeure très vaste, l'étude de l'articulation et des transitions entre discret et continu n'en est qu'un aspect. Nous soutenons que les invariants en mathématiques discrètes que l'on retrouve dans le continu doivent être investigués de manière spécifique, car si le discret peut être plus facilement appréhendable et accessible que le continu, il ne faudrait pas penser que cela est toujours le cas : « (...) le continu précède ontologiquement le discret » (Thom, 1992, p. 137).

Bibliographie

ARISTOTE (1965). *Organon – Les Topiques* (traduction et notes par J. Tricot). Vrin. Paris.

ARISTOTE (1970). *Organon – Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par J. Tricot). Vrin. Paris.

ARNOLD, V. I. (1998). Sur l'éducation mathématique. *Gazette de la SMF*, 78, 19-29.

ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 9(3), 281-308.

ARTIGUE, M. (1991). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 10(2/3), 241-285.

BALACHEFF, N. (1987). Les définitions comme outils dans la résolution de problème. *XI° Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal.

BALACHEFF, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In: Denise Grenier (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp. 219-244). Grenoble : IMAG.

BALACHEFF, N. (2003). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. *XIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (à paraître) La Pensée Sauvage, Grenoble.

BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BALL-LOEWENBERG, D. & BASS, H. (2000). Making Believe: The Collective Construction of Public Mathematical Knowledge in the Elementary Classroom. In D. Phillips (Ed.), *Yearbook of the National Society for the Study of Education, Constructivism in Education*. University of Chicago Press. Chicago.

BOERO, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html (consultée le 21 août 2013)

BOERO, P. & DOUEK, N. (2008). La didactique des domaines d'expérience. *Carrefours de l'éducation*, n°26, 99-114.

BOESEN, J., LITHNER, J., PALM, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 89-105.

BOULEAU, N. (1997). *Dialogues autour de la création mathématique*. Association Laplace-Gauss.

BORASI, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. New Hampshire: Heinemann.

BROUSSEAU, G. (1982). Études de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, n°45, 183-226. LSD2-IMAG. Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 7/2, 33-115.

BROUSSEAU, G. & GIBEL, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59 (1-3), 13-58.

BURKHARDT, H. (1988). Teaching problem solving. In H. Burkhardt, S. Groves, A. Schoenfeld and K. Stacey (Eds.) *Problem solving - A world view* (pp. 17-42). Nottingham, England: The Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.

BURTON, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Berlin: Springer.

CAÑADAS, M.C., DEULOFEU, J., FIGUEIRAS, L., REID, D., YEVDOKIMOV, O. (2007). The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice. *Journal of Teaching and Learning*, Vol. 5, n°1, 55-72.

CARLSON, M. P., & BLOOM, I. (2005). The cyclic nature of problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45–75.

CASTELA C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol 15(1), 7-47.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques - L'approche anthropologique. *Actes de l'U.E. de la Rochelle*.

CHEVALLARD, Y. (2001). Organiser l'étude – Structures et fonctions. In J-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Eds), *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage : Grenoble.

CORFIELD, D. (1997). Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*, Vol. 28, n°1, 99-121.

DAHLBERG, R. P. & HOUSMAN, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 33, 283-299.

DAVIS, P.J. & HERSH, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Brighton: The Harvester Press.

DE VILLIERS, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *Proceedings of PME 22*, vol. 2, 248-255. Stellenbosch, RSA.

DE VILLIERS, M. (2000). A Fibonacci generalization : a Lakatosian example. *Mathematics in College*, 10-29.

DIMACS (2001). *Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science: Educational Program*. http://dimacs.rutgers.edu/Education

DORIER, J-L. (Ed) (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7 (2), 5-31.

DUCHET, P. (1995). Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? *Actes MATh.en.JEANS*, pp. 95-103. Ed. MATh.en.JEANS, Paris (disponible en ligne : http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/95095103.pdf).

DURAND-GUERRIER, V. (2005). Retour sur le schéma de validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ?*

DURAND-GUERRIER, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques. In G. Aldon, P.-Y. Cahuet, V. Durand-Guerrier, M. Front, D. Krieger, M. Mizony, et C. Tardy (Eds) *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom, INRP.

EDWARDS, B.S. & WARD, M.B. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 111, n°5, 411-424.

EDWARDS, B.S. & WARD, M.B. (2008). The role of mathematical definitions in mathematics and in undergraduate mathematics courses. In M.P. Carlson & C. Rasmussen (Eds) *Making the connection: research and teaching in undergraduate mathematics*. MAA Notes Volume 73, pp. 223-232. Mathematical Association of America.

FAWCETT, H.P. (1938). *The nature of proof. Thirteenth yearbook of the NCTM*. New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

FEFERMAN, S. (1978). The logic of mathematical discovery vs. the logical structure of mathematics. In P.D. Asquith & I. Hacking (Eds) *Proceedings of the 1978 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 2, pp. 309-327. Philosophy of Science Association, East Lansing, Michigan.

FLETCHER, T.J. (1964). *Some lessons in Mathematics*. Cambridge University Press.

FREGE, G. (1979). *Logic in mathematics*. Published in Posthumous Writings. Trad. Long & White, ed. Hermes, Kambartel, and Kaulbach. Oxford: Basil Blackwell.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

GARDES, M-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse, Université Claude Bernard - Lyon I. Disponible en ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00948332 (consulté le 20 février 2014).

GARDNER, M. (1997). *The last recreations*. New York: Springer-Verlag.

GAREY, M. R., & JOHNSON, D. S. (1979). *Computers and intractability: A Guide to the theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman.

GIROUD, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse, Université Grenoble 1, disponible en ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/64/91/59/PDF/19720_GIROUD_2011_archivage.pdf (consulté le 7 juillet 2013).

GOLDENBERG, P. & MASON, J. (2008). Shedding light on and with examples spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 183-194.

GOLDIN, G.A. (2004). Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 56-60.

GRANGER, G.-G. (2003). *Philosophie, Langage, Science*, Paris, EDP Sciences.

GRAVEMEIJER, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning,* 1, 155-177.

GRAVEMEIJER, K. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. In *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics*. Voorburg, the Netherlands. https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=1 (consulté le 7 juillet 2013).

GRAVEMEIJER, K., & DOORMAN, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.

GRENIER, D. & PAYAN, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18-2, 59-100.

GRENIER, D & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en “classe”, essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques*, pp. 189-205. IREM de Paris 7, ARDM. Paris.

GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (Eds) (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Paideia. Presses Universitaires de Rennes / INRP.

HACKING, I. (Ed.) (1981). *Scientific revolutions*. Oxford : Oxford University Press.

HACKING, I. (1993). *Le plus pur nominalisme – l'énigme de Goodman*. (Trad. R. Pouivet). Éditions de l'éclat.

HANNA, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

HANNA, G. (2007). The Ongoing Value of Proof. In P. Boero (Ed) *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*, pp. 3-16. Sense Publishers.

HANNA, G., & BARBEAU, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM*, 40(3), 345–353.

HAREL, G. (1998). Two Dual Assertions: The First on Learning and the Second on Teaching (Or Vice Versa). *The American Mathematical Monthly,* 105, 497-507.

HEINZE, A., ANDERSON, I., REISS, K. (Eds) (2004). Discrete mathematics and Proof in the High School. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 44-84 et Vol. 36 (3), 82-116.

HENDERSON, D. (1996). *Experiencing geometry on plane and sphere*. Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.

HERSH, R. (1979). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. *Advances in Mathematics*, 31, 31-50.

HERSH, R. (2006). *18 Unconventional essays on the nature of mathematics*. New York: Springer Science & Business Media Inc.

HUMENBERGER, H. & REICHEL, H.C. (2003). Teaching student teachers : various components of a complex task. *Teaching mathematics and computer science*, 1/1, 55-72.

JOB, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*. Thèse, Université de Liège.

KAMPIS, G., KVASZ, L., STÖLTZNER, M. (2002). *Appraising Lakatos – Mathematics, Methodology and the Man*. Vienna Circle Institute Library – Kluwer Academic Publishers.

KNOLL, E. (2007). *Elementary Student Teachers Practising Mathematical Enquiry at their Level: Experience and Affect*. PhD Thesis, University of Exeter.

KOBIELA, M. & LEHRER, R. (2012). Establishing a mathematical practice in a middle school classroom. *ICLS Proceedings*, Vol 2, pp. 202-206.

KOICHU, B. (2012). Enhancing an intellectual need for defining and proving: a case of impossible objects. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 32, n°1, 2-7.

KOETSIER, T. (1991). *Lakatos' philosophy of mathematics, a historical approach*. North-Holland Amsterdam.

KUNTZMANN, J. (1976). Évolution et étude critique des enseignements de mathématique. CEDIC. Paris.

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

KVASZ, L. (2002). Lakatos' methodology between logic and dialectic. In G., Kampis, L. Kvasz, M., Stöltzner (Eds), *Appraising Lakatos – Mathematics, Methodology and the Man* (pp. 211-241). Vienna Circle Institute Library – Kluwer Academic Publishers.

LAKATOS, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis. Cambridge University Library.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Library.

LAKATOS, I. (1980). *The Methodology of Scientific Research Programmes - Volume 1: Philosophical Papers*. Cambridge University Press.

LAKATOS, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Traduction de N. Balacheff & J.-M. Laborde. Hermann.

LAMPERT, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.

LARSEN, S. (2004). Supporting the guided reinvention of the concepts of group and isomorphism: A developmental research project (Doctoral dissertation, Arizona State University, 2004). *Dissertation Abstracts International, B 65/02*, 781.

LARSEN, S. & ZANDIEH, M. (2005). Conjecturing and Proving as Part of the Process of Defining. In Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Eds.). *Proceedings of the 27th PME-NA*, pp. 797-804.

LARSEN, S. & ZANDIEH, M. (2008). Proofs and Refutations in the Undergraduate Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 205-216.

LARVOR, B. (1998). *Lakatos: An introduction*. Routledge (Edition de 2009).

LAVE, J., & WENGER, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

MARIOTTI, M.A. & FISCHBEIN, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219–248.

MITHALAL, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. Thèse de doctorat non publiée, Université de Grenoble. Disponible sur http://tel.archives-ouvertes.fr

MODESTE, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve*. Thèse, Université de Grenoble. Disponible en ligne http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/78/32/94/PDF/Modeste-these-TEL.pdf (consulté le 23 juillet 2013).

MOORE, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 27, 249–266.

MOTTERLINI, M. (2002). Reconstructing Lakatos: a reassessment of Lakatos' epistemological project in the light of the Lakatos Archive. *Studies in History and Philosophy of Science*, 33, 487-509.

NUNOKAWA, K. (1996). Applying Lakatos' theory to the theory of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 31 (3), 269-293.

OUVRIER-BUFFET, C. (2003a). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse, laboratoire Leibniz, Grenoble (disponible en ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/).

OUVRIER-BUFFET, C. (2003b). Can the Aristotelian and Lakatosian Conceptions constitute a tool for the analysis of a definition construction process? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 2, 19-36.

OUVRIER-BUFFET, C. (2004). Dévolution et gestion de situations de construction de définitions en mathématiques. *Symposium « Travail du professeur et dévolution dans les classes ordinaires »*. Congrès de l'AECSE, Paris.

OUVRIER-BUFFET, C. (2005). Activités de classification et construction de définitions à l'école élémentaire. *Colloque de la COPIRELEM*, Strasbourg. France.

OUVRIER-BUFFET, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 259-282.

OUVRIER-BUFFET, C. (2007). *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique*. Editions Fabert.

OUVRIER-BUFFET, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 165-182.

OUVRIER-BUFFET, C. (2012). L'activité de définition : vers un mode de pensée spécifique ? *Colloque EMF, GT3*. Genève, Suisse.

OUVRIER-BUFFET, C. (2014). Discrete mathematics teaching and learning. *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.

PEASE, A. (2007). *A computational model of Lakatos-style reasoning*. PhD Thesis. School of Informatics, University of Edinburgh.

PEIRCE, C.S. (1995). *Le raisonnement et la logique des choses, les conférences de Cambridge 1898*. Les éditions du Cerf.

POPPER, K. (1962). *La société ouverte et ses ennemies* (Tome1 - L'ascendant de Platon). Seuil, Ed. 1979.

POPPER, K. (1985). *Conjectures et réfutations – La croissance du savoir scientifique*. Trad. De Launay. Payot, Paris.

POPPER, K. (1990). *Le réalisme et la science (post-scriptum à la logique de la découverte scientifique)*. Hermann. Paris.

RASMUSSEN, C. & ZANDIEH, M. (2000). Defining as a mathematical activity: a realistic mathematical analysis. In M. L. Fernández (Ed.) *Proceedings of the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 301-305). Columbus, OH.

RASMUSSEN, C., ZANDIEH, M., KING, K., TEPPO, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7:1, 51-73.

RAV, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7, 5–41.

REID, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5-29.

ROBINSON, R. (1954). *Definition*. Oxford at the Clarendon Press.

SANDEFUR, J., MASON, J., STYLIANIDES, G.J., & WATSON, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 323-340.

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic.

SHRIKI, A. (2010). Working like real mathematicians: developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 159-179.

SIERPINSKA, A. (1995). La *compréhension en mathématiques*. De Boeck Université.

SRIRAMAN, B. (2003). Can mathematical discovery fill the existential void? The use of conjecture, proof and refutation in a high school classroom. *Mathematics in School*, 32(2), 2-6.

SRIRAMAN, B. (2006). An ode to Imre Lakatos: Bridging the ideal and actual mathematics classrooms. *Interchange*, Vol. 37/1-2, 151-178.

SRIRAMAN, B. (2008). Let Lakatos be – A commentary on Pimm et *al* "Would the real Lakatos please stand up!". *Interchange*, Vol. 39/4, 483-492.

STÖLTZNER, M. (2002). What Lakatos could teach the mathematical physicist. In G., Kampis, L. Kvasz, M., Stöltzner (Eds), *Appraising Lakatos – Mathematics, Methodology and the Man* (pp. 157-187). Vienna Circle Institute Library – Kluwer Academic Publishers.

SWINYARD (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 93-114.

TAPPENDEN, J. (1995). Extending knowledge and 'fruitful concepts': Fregean themes in the foundations of mathematics. *Noûs*, Vol. 29, Issue 4, 427-467.

TAPPENDEN, J. (2008a). Mathematical concepts and definitions. In P. Mancosu (Ed.) *The Philosophy of Mathematical Practice*, pp. 256–275. Oxford: Oxford University Press.

TAPPENDEN, J. (2008b). Mathematical concepts: fruitfulness and naturalness. In P. Mancosu (Ed.) *The Philosophy of Mathematical Practice*, pp. 276–301. Oxford: Oxford University Press.

TALL, D.O. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

TALL, D.O. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 4, 281–288. Bergen. Norway.

THOM, R. (1992). L'antériorité ontologique du continu sur le discret. In Salanskis, JM & Sinaceur, H. (Eds) *Le labyrinthe du continu - Colloque de Cerisy*, 137-143. Springer-Verlag.

THURSTON, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161–177.

TREFFERS, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

TSAMIR, P., TIROSH, D., & LEVENSON, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 81-95.

VAN DORMOLEN, J., & ZASLAVSKY, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 91-196.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 133-169.

VINNER, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 65-80. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

VINNER, S. & DREYFUS, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (4), 356-366.

VINNER, S., & HERSHKOWITZ, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th PME International Conference*, 177–184.

WATSON, A., & MASON, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(2), 237–249.

WILKERSON-JERDE, M.H. & WILENSKY, U.J. (2011). How do mathematicians learn math? Resources and acts for constructing and understanding mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 78, 21–43

WENGER, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

WEBER, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 39, n°4, 431-459.

WEBER, K. (2011). Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 329-344.

WERNDL, C. (2009). Justifying Definitions in Mathematics - Going Beyond Lakatos. *Philosophia Mathematica*, 1–28.

YIM, J., SONG, S., & KIM, J. (2008). Mathematically gifted students' revisiting of Euler's polyhedron theorem. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5(1), 125-142.

ZANDIEH, M. & RASMUSSEN, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 57–75.

ZASLAVSKY, O., & SHIR, K. (2001). What constitutes a (good) definition? The case of a square. In *Proceedings of 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, 161-168. Netherlands, Utrecht University.

ZASLAVSKY, O., & SHIR, K. (2002). Students' conceptions of an acceptable geometric definition. In A. D Cockburn & E. Nardi (Eds), *26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, 201-208. University of East Anglia, UK.

ZASLAVSKY, O., & SHIR, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317–346.

Discrete mathematics and Proof in the High School (2004). *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 44-84 et Vol. 36 (3), 82-116.

Annexe 1 - Des potentialités didactiques pour l'activité de définition sous-exploitées

Avec quelques travaux en didactique (antérieurs à des travaux spécifiques sur la définition), nous allons montrer rapidement qu'envisager une activité de définition avec des étudiants (quel que soit leur niveau) est réalisable. Cependant, ils ne décrivent pas le processus de définition.

Fletcher (1964) propose deux leçons qui se prêtent à une activité de définition et qui sont destinées à être transmises à des enseignants.
La première concerne les motifs et connexions : l'objectif est l'étude du nombre de chemins nécessaires pour reproduire un motif donné (le problème peut être ainsi formulé : étant donné un motif ou un réseau ayant *n* chemins, le reproduire avec un nombre inférieur de chemins).
La seconde concerne le concept de convexité : des exemples et non-exemples de formes convexes, désignés comme tels, sont proposés aux étudiants. Ceux-ci doivent effectuer la distinction perceptive entre des formes effectivement convexes ou non, sans travail explicite sur les propriétés en jeu. Une fois la terminologie introduite par l'enseignant, les élèves ont à produire des figures convexes et non-convexes. Puis à définir convexe.
Si nous étudions spécifiquement ce qui pourrait relever d'une activité de définition dans ces deux leçons, en tenant compte des indications de Fletcher (1964) (qui sont insuffisantes à la description d'un processus de définition mais qui ont le mérite d'exister), nous identifions les éléments suivants :

- Il s'agit de situations de classification ;
- Qui impliquent la génération d'exemples et contre-exemples (par les étudiants et/ou par l'enseignant) ;
- Ainsi que la recherche d'une preuve de l'équivalence entre définitions.
- L'aspect prédominant concernant les définitions est la dénomination et le raccourci de langage.
- Les définitions n'ont pas un caractère provisoire et constructif, mais un aspect formel.
- Des définitions, nécessaires à la résolution des problèmes, sont données par l'enseignant, court-circuitant ainsi d'intéressantes activités de définition.

Borasi (1992) relate une expérimentation hors classe avec deux élèves de 14 ans. Ce qui est notable, ce sont ses essais de situations « à la Lakatos » où sont à l'œuvre la génération d'exemples et contre-exemples, un changement de cadre. L'un des résultats important à notre avis réside dans l'acceptation des élèves du statut provisoire d'une définition.

Ball & Bass (2000) propose une situation de définition à des élèves de 8 ans autour des concepts de pair/impair, déjà familiers des élèves. L'acte de dénomination est central ici, en particulier pour montrer l'intérêt que l'on porte à un concept ou à une propriété et pour que l'on travaille spécifiquement dessus. Là encore, le processus de définition n'est pas décrit, mais l'on peut apprécier le fait que les élèves s'engagent dans la rédaction de définitions.

Annexe 2 – Description de la méthode des preuves et réfutations et exemplifications de Lakatos (Lakatos, 1961 ; 1976 ; 1984)

1. Cadre général de P&R

Corfield (1997) propose les étapes suivantes afin de situer le travail de P&R dans le cadre plus large de l'épistémologie de Lakatos :

- 1ère étape, celle des essais / erreurs naïfs (*naive trial and error*). Il s'agit là d'une conjecture dite naïve (initiale en fait) atteinte par la méthode de Popper des conjectures et réfutations. La formule d'Euler est antérieure à toute preuve, Euler ayant testé sa formule sur des prismes variés.
- 2ème étape, celle de la procédure de preuve par analyse-synthèse (processus non disponible dans la première étape). La conjecture naïve disparaît au profit de théorèmes *proof-generated* de plus en plus complexes, de lemmes cachés etc. La preuve-analytique comprend un cycle de conjecture, preuve, contre-exemples, réexamen de la conjecture et de la preuve (cycle perpétuel).
- 3ème étape, celle du programme de recherche (*research program* : il s'agit d'un concept de Lakatos inventé pour sa philosophie des sciences), qui est au-delà du seul travail de P&R, et que nous n'aborderons pas ici. Nous renvoyons le lecteur à Kvasz (2002) pour une critique constructive de cet aspect du travail de Lakatos et à Kampis et *al*. (2002). On peut noter ici l'ambivalence de Lakatos par rapport à la construction axiomatique.

2. La décomposition de la méthode des preuves et réfutations

Lakatos (1984) décline trois méthodes : la méthode de **relégation des exceptions** (« apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues » (Lakatos, 1984, p. 177 citant Cauchy), la méthode de **relégation des monstres pour défendre un théorème** (« La situation, pas exceptionnelle en recherche mathématique, est la suivante : un théorème a déjà été formulé mais on doit préciser le sens de ses termes afin de le rendre strictement correct » (Pólya, 1954, p. 55)) et la **méthode des preuves et réfutations** dont il énonce trois règles heuristiques. Ces règles soulignent la nécessité de ne pas se limiter à l'usage des méthodes de relégation des exceptions et des monstres, elles se présentent ainsi : *en présence d'une conjecture, mettre en chantier sa preuve comme sa réfutation* (Règle1), rechercher *des contre-exemples à la fois à la conjecture (aspect global) et aux lemmes suspects (aspect local)* (Règle1). La découverte d'un contre-exemple engendre un réexamen de la preuve et une recherche d'un lemme "coupable" (Règle2) : il ne faut pas reléguer un contre-exemple, c'est-à-dire se contenter d'une relégation des exceptions. Il ne faut pas non plus écarter une réfutation comme un "monstre" (Règle2). Le contre-exemple peut donc être local (contre-exemple pour un lemme) ou global (contre-exemple pour la conjecture) : il faut donc vérifier si un contre-exemple local est global (Règle3), et dans ce cas se référer à la Règle2 (voir Lakatos, 1984, p. 63). Une quatrième règle est énoncée : *en présence d'un contre-exemple local et non global, essayer d'améliorer la preuve analytique en remplaçant le lemme réfuté par un autre qui ne le soit pas* (Lakatos, 1984, p. 73).

3. Les fondements de la découverte mathématique, ou le « développement de théories mathématiques non formelles »

Sa méthode se décline en sept étapes (Lakatos, 1984, p. 165s) :

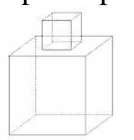
1) Conjecture primitive.

2) Preuve (une expérience mentale grossière ou une argumentation, décomposant la conjecture primitive en sous-conjectures ou encore en lemmes).
3) Émergence d'un contre-exemple 'global' (contre-exemple à la conjecture primitive).
4) Réexamen de la preuve : le 'lemme coupable', par lequel le contre-exemple global est un contre-exemple 'local', est repéré. Ce lemme coupable peut d'abord être resté 'caché' ou avoir été mal identifié. Il est maintenant rendu explicite et incorporé sous forme de condition à la conjecture primitive. Le théorème (c'est-à-dire la conjecture améliorée) remplace la conjecture primitive et a pour nouveau caractère essentiel le concept engendré par la preuve.
5) On examine les preuves d'autres théorèmes pour voir si le lemme nouvellement trouvé ou le nouveau *proof-generated concept* y apparaissent : ce concept peut se trouver à la croisée de différentes preuves, et se révéler ainsi d'une importance fondamentale.
6) On contrôle une à une les conséquences, jusque-là acceptées, de la conjecture d'origine maintenant réfutée.
7) Les contre-exemples deviennent de nouveaux exemples – de nouveaux champs de recherche s'ouvrent.

4. Deux études de cas

Dans P&R, Lakatos (1984) propose deux études de cas : les polyèdres et la continuité. Cependant, seul un scénario est proposé pour le cas de la continuité en appendice (« Cauchy et la défense du « principe de continuité »). Nous les reprenons ci-dessous de manière synthétique, en mettant en évidence les données de la situation et le fonctionnement de celle-ci.

4.1. Les polyèdres

- **Trois grandes catégories de contre-exemples vont intervenir dans cette situation**
    - Les polyèdres à structures multiples : par exemple un petit cube empilé sur un grand cube vérifie S-A+F = 3. 
  - Les polyèdres à tunnels : par exemple, un simple cadre de tableau vérifie S-A+F = 0. On peut aussi empiler n cubes-tunnels (c'est-à-dire des cubes privés de deux faces opposés – à l'image des bibliothèques IKEA !) pour obtenir des polyèdres non eulériens pour lesquels S-A+F = -n.
  - Les polyèdres à cavité un petit cube imbriqué dans un grand n'est pas convexe ni eulérien et satisfait S-A+F = 4.
    - NB : la topologie algébrique s'intéresse à l'étude des polyèdres pour son apport à la théorie des surfaces.

- **Données initiales** :
    - Un **problème** qui pose la question de la transition entre le plan et l'espace : Ici le but est une **classification**.

> Existe-t-il une relation entre le nombre S de sommets, le nombre A d'arêtes et le nombre F de faces d'un polyèdres, en particulier d'un polyèdre régulier, du même type que celle, évidente, qu'il y a entre le nombre de sommets et d'arêtes d'un polygone, à savoir S=A ? Cette dernière relation nous permet de classer les polygones selon leur nombre d'arêtes (ou de sommets) : triangles, quadrilatères, pentagones etc. Une relation du même genre nous aiderait à classer les polyèdres. (Lakatos, 1984, p.7).

- A l'origine, Euler s'intéressait à la classification des polyèdres et avait noté que l'analogie entre polygones et polyèdres (c'est-à-dire classer en fonction du nombre d'arêtes (pour les polygones) et classer en fonction du nombre de faces (pour les polyèdres)) était insuffisante.
- **Conjecture** (émanant des élèves) dite naïve ou primitive : S-A+F = 2 pour un polyèdre quelconque.
- **Une conjecture alternative** peut porter sur la relation entre S, A et F pour tout polyèdre.
- **Premiers essais** : ils corroborent la conjecture qui peut être prouvée.
- **Le maître propose une preuve** (historiquement la preuve de Cauchy).
  - **L'analyse de la preuve** (en trois étapes) génère des sous-conjectures et lemmes à étudier.
  - **La preuve est une expérience mentale, et non un exercice formel.**

- **Critique de la preuve**
  - **À l'aide d'un contre-exemple local mais non global** : montrer la faiblesse de la preuve (car remise en cause d'une sous-conjecture ou lemme) mais n'invalide pas la conjecture principale.
    - **Terminologie introduite**
      - **Contre-exemple local :** réfute un lemme mais pas la conjecture principale ;
      - **Contre-exemple global** : réfute la conjecture principale.
  - **À l'aide d'un contre-exemple global** (polyèdre à cavité – petit cube dans un grand)
    - Attitudes possibles
      - **Rejet de la conjecture et recherche d'une autre approche.**
      - **Considérer que le contre-exemple est un monstre et définir « polyèdre » en conséquence** pour rejeter le monstre. La définition est alors un **outil** pour reléguer un monstre (méthode de relégation de monstres). On repart ensuite sur la formule d'Euler et on peut encore trouver des contre-exemples à la conjecture etc. On recherche le domaine de validité de la conjecture.
      - **La rectification de monstres.**
      - **Amélioration de la conjecture par incorporation de lemmes. Théorème produit de la preuve *vs* conjecture naïve.**

- **Critique de la preuve-analytique (nécessaire à la communication ; liste de lemmes non-triviaux)**
  - La relégation de monstres est là pour défendre le théorème.
  - Les lemmes cachés sont à débusquer (on reprend les trois types de contre-exemples et les lemmes – et on recherche des implicites).
  - La méthode des preuves et réfutations intervient.
    - Principe de rétrocession de la contradiction.
    - C'est une méthode d'incorporation de lemmes.
    - Énoncé des quatre règles (voir ci-dessus).
    - Ne pas trop réduire sinon tout disparaît ; chercher à augmenter le contenu.
    - L'un des fondements de la méthode des preuves et réfutations : l'induction.

- Les contre-exemples heuristiques (stimulent le développement de la connaissance) s'opposent aux contre-exemples logiques (qui ne sont pas en contradiction avec les intentions de la conjecture).
- Une conjecture prouvée peut ne l'être que momentanément, jusqu'à l'apparition d'un nouveau contre-exemple.

4.2. La continuité

Cet exemple est proposé en appendice : seul un scénario général est donné.

- Conjecture : la limite d'une série convergente de fonctions continues est continue.
Et **preuve de Cauchy** (non donnée dans P&R).
- Problème (historique) : définition de la continuité. En découleront notamment les définitions de limite etc.

- Exemples et Contre-exemples :

- Exemple de Fourier (fonction discontinue au sens de Cauchy) : $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + etc.$
- Le lemme coupable est repéré par Seidel du fait d'un usage approximatif de Cauchy des infiniment petits, preuve d'existence d'un maximum (type de preuve apparu plus tard avec l'école de Weierstrass), et on retrouve le rejet de Lakatos de la méthode euclidienne (surtout de l'induction euclidienne concluant du particulier au général – la question de l'induction est complexe, voir par exemple Kampis et *al*. (2002)).
- Abel : recherche du domaine de validité du théorème de Cauchy
- Proposition : se restreindre aux séries entières et éviter les séries trigonométriques (relégation d'exceptions assimilée à une méthode euclidienne et non à une méthode de P&R, ce qui « bloque » le progrès de la découverte mathématique).
- Seidel va découvrir la convergence uniforme (*proof-generated concept* / lemme caché) et mettre en œuvre un processus de P&R :

> Quand, partant de la certitude ainsi acquise que le théorème n'est pas universellement valide, et de là que sa preuve doit reposer sur quelques présupposition cachée, on soumet alors la preuve à) une analyse plus détaillée, il n'est pas très difficile ainsi de découvrir l'hypothèse cachée ; on peut alors déduire en retour que cette hypothèse n'est pas satisfaite par les séries qui représentent des fonctions discontinues, et ce n'est qu'ainsi que l'accord peut être rétabli entre la séquence de la preuve, mis à part cela, correcte et ce qui avait été établi d'autre part. (Citation de Seidel (1847, p. 383), cité par Lakatos (1984, p. 176).

Un dernier exemple est donné par Lakatos. Il concerne l'intégrabilité au sens de Riemann-Stieltjes et le concept de variation bornée qui est, selon Lakatos, un *proof-generated concept* si l'on considère la preuve de Dirichlet et la conjecture de Fourier (Rudin, exercice 17 chapitre 8). Dirichlet avait travaillé sur la conjecture de Fourier et lui avait adjoint des lemmes qui sont les fameuses conditions de Dirichlet. Jordan a découvert la variation bornée en faisant une étude minutieuse de la preuve de Dirichlet.

Annexe 3 – Diagrammes proposés par Sriraman (2006, p. 168 - 169)

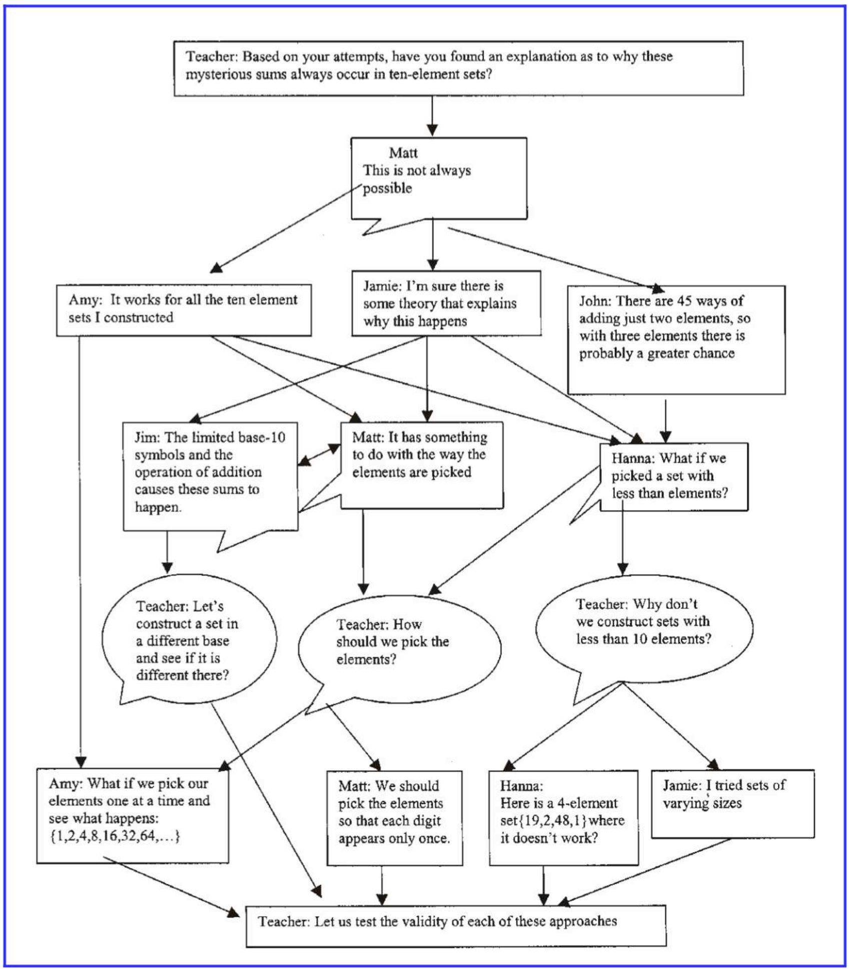


Figure 3. *Plausible discourse based on student solutions and strategies.*

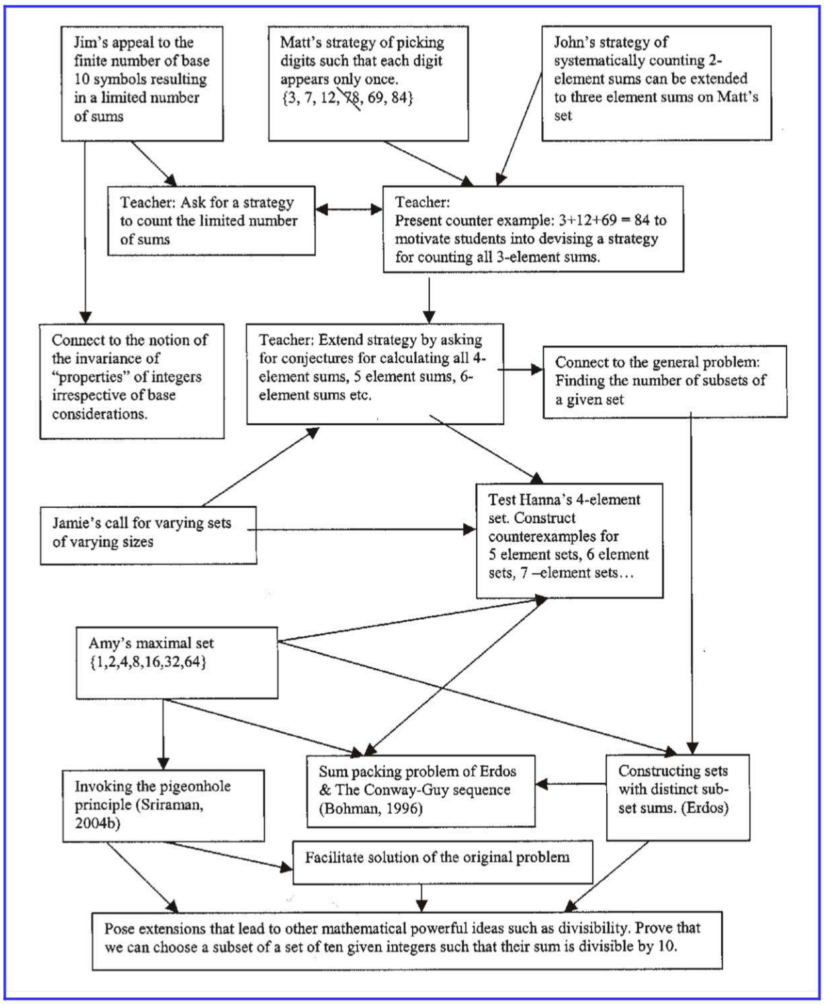


Figure 4. *Pathways into mathematizing experiences via conjecture-proof-refutation in discourse.*

Annexe 4 – Définitions successives de « limite » produites par des étudiants (Swinyard, 2011)

Definition #1:	f has a limit L at $x=a$ provided as x-values get closer to a, y-values get closer to L. **(Session 4)**
Definition #2:	If you could zoom forever and always get closer to a and L, then you have a limit. **(End of Session 4)**
Definition #3:	A function has a limit L at a when zooming in FOREVER both horizontally and vertically yields no gaps that have length > 0 AND that it looks like it approaches a finite number L. **(Session 5)**
Definition #4:	The limit L of a function at $x=a$ exists if every time we look at the function more closely as we get infinitely close to $x=a$, it bears out the same pattern of behavior, i.e., looks to be approaching some y value L w/no gaps in the graph. **(Session 6)**
Definition #5:	As x gets arbitrarily close to a, $\|L\text{-}f(x)\|$ gets arbitrarily small. **(Session 9)**
Definition #6:	For any arbitrarily small # λ you can find an x-value that satisfies $\|L\text{-}f(x)\|\leq\lambda$. **(Session 9)**
Definition #7:	For any arbitrarily small # λ we can find a value of x arbitrarily close to a such that $\|L\text{-}f(x)\|\leq\lambda$. **(Session 9)**
Definition #8:	For any arbitrarily small # λ we can find a value of x arbitrarily close to a, i.e. $\|x\text{-}a\|<\theta$, such that $\|L\text{-}f(x)\|\leq\lambda$. Note: θ is an arbitrarily small #. **(Session 9)**
Definition #9:	$\lim_{x \to a} f(x) = L$ provided that: given any arbitrarily small # λ, we can find an $(a\pm\theta)$ such that $\|L\text{-}f(x)\| \leq \lambda$ for all x in that interval except possibly $x=a$. **(Session 9 – Final Definition)**

Fig. 13. Amy and Mike's evolving definition of limit.

Les définitions de limite produites dans l'expérimentation de Swinyard (2011) (Swinyard, 2011, p. 113)

Annexe 5 – Profils des chercheurs interrogés

	H/F	Chercheur(e) depuis	Champ de recherche	Enseignement
C 1	F	16 ans	Théorie des groupes et théorie des représentations - Super-algèbres	Prépa oral CAPES
C 2	H	25 ans	Théorie des nombres – arithmétique. Focus sur les conjectures	M1-M2, prépa agreg
C 3	F	25 ans	Probabilités	L1 + prépa CAPES
C 4	F	13 ans	Théorie des nœuds	M1 (prépa CAPES, prépa à l'agreg interne) et TD en M2
C 5	H	22 ans	Géométrie différentielle. Méthodes probabilistes appliquées aux objets plutôt discrets	Prépa agreg
C 6	H	24 ans	Analyse fonctionnelle – géométrie des espaces de Banach	Tous les niveaux de l'université
C 7	H	26 ans	Génie électrique et statistiques	Master de statistiques et modélisation et Licence (parcours biologie, maths-info)
C 8	H	40 ans	Logique	Logique, analyse et topologie, prépa CAPES + IREM